



ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

**Е. Б. ВАХОВСКИЙ
А. А. РЫВКИН**



Е. Б. ВАХОВСКИЙ
А. А. РЫВКИН

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

Книга предназначена для углубленного изучения программы средней школы. В ней содержится около 500 задач (с указаниями и решениями), среди которых нет однотипных. В задачнике помимо традиционных представлены такие разделы, как стереометрические задачи, решаемые на проекционном чертеже, иррациональные, логарифмические и трансцендентные неравенства, отыскание периодов тригонометрических функций и др. Некоторые главы снабжены небольшими теоретическими введениями, дополняющими школьные учебники.

Книга рассчитана на учащихся, которые готовятся к поступлению в вузы с расширенной программой по математике. Она может быть использована также для организации факультативных занятий, для работы в школьных математических кружках и для занятий в физико-математических школах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

	Задачи	Указания I II и III		Решения
<i>Г л а в а 1.</i> Геометрические задачи на плоскости	7	95	135	171
<i>Г л а в а 2.</i> Построения на плоскости	13	101	140	208
<i>Г л а в а 3.</i> Геометрические задачи в пространстве	15	103	141	216
<i>Г л а в а 4.</i> Геометрические задачи на проекционном чертеже . . .	21	109	148	257
<i>Г л а в а 5.</i> Геометрические места	25	111	149	266
<i>Г л а в а 6.</i> Свойства чисел. Дели- мость	26	112	150	273
<i>Г л а в а 7.</i> Алгебраические преоб- разования	26	112	150	277
<i>Г л а в а 8.</i> Делимость многочле- нов. Теорема Безу. Целые урав- нения	30	113	151	285
<i>Г л а в а 9.</i> Алгебраические урав- нения и системы	32	114	152	293
<i>Г л а в а 10.</i> Алгебраические не- равенства	45	117	154	326
<i>Г л а в а 11.</i> Логарифмические и показательные уравнения и си- стемы	55	120	156	352
<i>Г л а в а 12.</i> Тригонометрические преобразования	58	121	158	367
<i>Г л а в а 13.</i> Тригонометрические уравнения и системы	61	122	158	373

<i>Г л а в а 14.</i> Тригонометрические неравенства	67	125	162	410
<i>Г л а в а 15.</i> Трансцендентные не- равенства	68	126	163	420
<i>Г л а в а 16.</i> Трансцендентные урав- нения	69	126	163	426
<i>Г л а в а 17.</i> Комплексные числа	70	127	164	433
<i>Г л а в а 18.</i> Задачи на составление уравнений	73	128	164	440
<i>Г л а в а 19.</i> Последовательности и прогрессии	82	130	166	451
<i>Г л а в а 20.</i> Суммирование . . .	85	131	167	463
<i>Г л а в а 21.</i> Соединения и бином	87	132	168	469
<i>Г л а в а 22.</i> Обратные тригономет- рические функции	90	132	169	475
<i>Г л а в а 23.</i> Область определения. Периодичность	91	133	169	485
<i>Г л а в а 24.</i> Наибольшие и нап- * меньшие значения	93	134	169	490

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние два года было издано почти одновременно несколько новых пособий и задачников, предназначенных для углубленного изучения элементарной математики. Появление в таких условиях еще одной книги подобного плана должно быть оправдано. С такого оправдания и будет начато предисловие.

Нередко книги по элементарной математике написаны либо с целью провести юного читателя за руку через все возникающие на его пути преграды, либо с позиций того преподавателя плавания, который руководствуется принципом — барактайся, пока не научишься. Авторы далеки от мысли критиковать те или иные конкретные пособия и задачники только потому, что они принадлежат к первой или второй группе. Здесь осуществлена лишь попытка предложить некую третью альтернативу, основанную на убеждении, что преподавание математики в средней школе выполнит свое назначение только в том случае, если, помимо необходимого объема информации и технических навыков, поможет своему воспитаннику овладеть культурой математических рассуждений, т. е. научит его самостоятельно пользоваться известными ему методами. Авторы надеялись приблизиться к достижению поставленной перед собой цели, создав полупрограммированный задачник, в котором обычную форму: условия задачи — решение удалось бы видоизменить с тем, чтобы обеспечить максимальную самостоятельность читателя. Так появилась идея снабдить каждую задачу одним или двумя (а в исключительных случаях и тремя) указаниями. Эти указания собраны отдельно и предшествуют решениям, причем каждое третье указание помещено непосредственно после второго и отделено от него пробелом. Если к задаче дано только первое указание, то в конце его стоит знак ↓.

Вначале предполагалось сделать указания и решения единым целым с тем, чтобы в решениях не повторялись соображения, уже отраженные в указаниях. Однако интересы преподавателей средней школы, которым также адресована эта книга, заставили нас сделать решения достаточно самостоятельными для квалифицированного читателя.

При написании указаний авторы стремились помочь читателю адаптироваться к условиям конкретной задачи и прийти к ее решению естественным путем. Таким образом, цель указаний — продемонстрировать на примерах, как нужно приступать к решению задач, как максимально использовать условие задачи и эффективный аппарат аналогий.

Если в задачнике содержится более тысячи задач, то читателю предстоит осуществить разумное планирование своих усилий с тем, чтобы отобрать из этой массы задач те, решение которых необходимо. Мы приняли эту заботу почти полностью на себя, избегая включать в задачник одиотипные задачи и ограничив количество задач числом пятьсот, т. е. тем количеством, которое читатель в состоянии решить в течение года самостоятельных занятий. Основу задачника составили варианты письменных работ по математике, предлагавшихся на вступительных экзаменах в ряде ведущих вузов Москвы.

В задачник, как это видно из его названия, включены в основном задачи повышенной трудности. Это определяет и пути его использования. Нам представляется, что он будет полезен при организации в школе факультативных занятий математикой, а также для самостоятельной подготовки к вступительным экзаменам в вузы с повышенными требованиями по математике.

Некоторые главы задачника снабжены теоретическими введениями. Это сделано в тех случаях, когда изложение соответствующих разделов в школьном курсе либо отсутствует, либо не удовлетворяет авторов. Наиболее подробные введения предпосланы главам «Алгебраические уравнения и системы» и «Алгебраические неравенства».

Следует предостеречь читателя от пользования теоретическими введениями как справочным материалом, так как отдельные определения не соответствуют подобным определениям в стабильных учебниках. Каждое такое введение нужно либо прочесть от начала до конца, либо не читать вовсе. Правда, тот, кто выберет второе, будет испытывать дополнительные трудности при разборе задач.

В задачнике есть разделы, которые исключены в настоящее время из программы средней школы: обратные тригонометрические функции, комбинаторика. По мнению авторов исчезновение этих тем из школьного курса существенно обеднило математический опыт выпускников. Их изучение на факультативных занятиях смогло бы отчасти устранить образовавшийся пробел.

Некоторые главы задачника посвящены сравнительно новым темам, проникшим на конкурсные экзамены в последние годы.

Авторы считают своим приятным долгом искренне поблагодарить тех, кто помогал им в работе советами и дружеской критикой. Это в первую очередь Н. Х. Розов и А. З. Рывкин, внимательно прочитавшие рукопись и сделавшие ряд конструктивных замечаний по ее улучшению, А. Волянский и И. Ильина, предложившие более рациональное решение нескольких задач, и, наконец, редактор книги А. Д. Бершадский, который интерпретировал свои обязанности более широко, чем это обычно принято, и прорешал все задачи, обнаружив ошибки в ответах и нерациональность в решениях.

Мы будем признательны всем, кто найдет время, чтобы высказать нам свое критическое отношение к этой книге.

Авторы

ЗАДАЧИ

Глава 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ

Обозначения: a, b, c —стороны треугольника; A, B, C —углы, лежащие против этих сторон, соответственно; m_a —медиана стороны a ; l_A —биссектриса угла A ; h_a —высота, опущенная на сторону a ; R —радиус описанной окружности; r —радиус вписанной окружности; $P=2p$ —периметр многоугольника.

Длиной биссектрисы внешнего угла A треугольника называется отрезок биссектрисы, заключенный между точкой A и точкой пересечения биссектрисы с продолжением стороны a .

Отношение площадей двух треугольников, имеющих общий угол, равно отношению произведений сторон, заключающих этот общий угол.

Имеет место формула, выражающая длину медианы треугольника через длины его сторон: $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь $S = pr$.

Площадь четырехугольника: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$, где d_1 и d_2 —длины его диагоналей, а α —угол между ними.

При решении планиметрических задач приходится применять производные пропорции.

$$\text{Если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{ma + nb}{pa + qb} = \frac{mc + nd}{pc + qd}.$$

Если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{c}{d},$$

то

$$\frac{a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \dots \pm b_n} = \frac{c}{d},$$

где комбинация знаков берется любая, но одинаковая для числителя и знаменателя.

1.1. Вокруг правильного треугольника ABC описана окружность O радиуса R . Окружность O_1 касается двух сторон AB и BC треугольника и окружности O . Найти расстояние от центра окружности O_1 до вершины A .

1.2. Высота равнобедренного треугольника с углом α при основании больше радиуса вписанного в него круга на m . Определить основание треугольника и радиус описанной окружности.

1.3. Доказать, что радиус окружности, делящей пополам сторону треугольника, вдвое меньше радиуса окружности, описанной около этого треугольника.

1.4. В треугольнике соединены основания биссектрис. Найти отношение площади данного треугольника к площади образовавшегося треугольника, если стороны данного треугольника относятся как $p:q:l$.

1.5. Даны внутренние углы A, B, C треугольника ABC . Пусть окружность касается сторон BC, AC и AB треугольника соответственно в точках A_1, B_1, C_1 . Найти отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC .

1.6. Дан треугольник ABC , углы B и C которого относятся, как $1:3$, а биссектриса угла A делит площадь треугольника в отношении $2:1$. Найти углы треугольника.

1.7. Вычислить длину l биссектрисы внешнего угла A треугольника, если даны его стороны b и c и угол A между ними ($b \neq c$).

1.8. В треугольнике площади S с острым углом α при вершине A биссектриса угла A в p раз меньше радиуса описанного и в q раз больше радиуса вписанного круга. Найти сторону треугольника, лежащую против угла A .

1.9. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AM и BN . Пусть O — точка их пересечения. Известно, что AO относится к OM , как $\sqrt{3}$ к единице, а BO к ON — как единица к $\sqrt{3}-1$. Найти углы треугольника.

1.10. Внутри угла α взята точка M . Ее проекции P и Q на стороны угла удалены от вершины O угла на расстояния $OP=p$ и $OQ=q$. Найти расстояния MP и MQ от точки M до сторон угла.

1.11. В остроугольном треугольнике две высоты равны 3 см и $2\sqrt{2}$ см, а их точка пересечения делит третью высоту в отношении 5:1, считая от вершины треугольника. Найти площадь треугольника.

1.12. В треугольнике ABC разность углов B и C равна $\pi/2$. Определить угол C , если известно, что сумма сторон b и c равна k , а высота, опущенная из вершины A , равна h .

1.13. В треугольнике ABC имеется точка O такая, что углы ABO , BCO и CAO равны α . Выразить $\operatorname{ctg} \alpha$ через площадь треугольника и его стороны.

1.14. В треугольнике ABC дана разность φ углов A и B ($\varphi = A - B > 0$). Известно, что высота, опущенная из C на AB , равна $BC - AC$. Найти углы треугольника.

1.15. Даны длины высот $AA_1 = h_a$ и $BB_1 = h_b$ треугольника ABC и длина $CD = l$ биссектрисы угла C . Найти угол C .

1.16. В треугольник с основанием a и противоположным углом α вписана окружность. Через центр этой окружности и концы основания треугольника проведена вторая окружность. Найти ее радиус.

1.17. Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной средней по длине стороне треугольника.

1.18. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен r , сторона BC больше r в k раз, а высота, опущенная на эту сторону, больше r в 4 раза. Найти полупериметр p , $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ и стороны b и c .

1.19. Углы C , A , B треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , K — центр внеписанной окружности, касающейся стороны AC , L — центр внеписанной окружности, касающейся стороны BC . Доказать, что треугольники ABC и OKL подобны.

1.20. В треугольнике ABC углы A , B и C образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Доказать, что

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

1.21. Доказать, что если P , Q , R —соответственно точки пересечения каждой из сторон BC , CA , AB (или их продолжений) треугольника ABC с некоторой прямой, то

$$\frac{BR \cdot AQ \cdot PC}{AR \cdot QC \cdot BP} = 1$$

(теорема Менелая).

1.22. Точка D находится на стороне BC треугольника ABC . Доказать, что

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$$

(теорема Стюарта).

1.23. На сторонах треугольника ABC взяты точки P , Q и R так, что три прямые AP , BQ и CR пересекаются в одной точке. Доказать, что

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

(теорема Чебы).

1.24. Через произвольную точку O , взятую внутри треугольника ABC , проведены прямые DE , FK , MN , параллельные соответственно AB , AC , BC , причем F и M лежат на AB , E и K —на BC , N и D —на AC . Доказать, что

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1.$$

1.25. Через центр O правильного треугольника ABC проведена произвольная прямая. Доказать, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

1.26. Вокруг треугольника ABC , в котором $a=2$, $b=3$ и угол $C=60^\circ$, описана окружность. Определить радиусы окружностей, проходящих через две вершины треугольника и центр описанной окружности.

1.27. Стороны треугольника связаны соотношением $a^2 = c(b+c)$. Доказать, что угол A вдвое больше угла C .

1.28. Пусть O —центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Доказать, что если $OA^2 = OB \cdot OC$, то

$$\cos \frac{B-C}{2} = 2 \sin^2 \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}.$$

1.29. Площадь S треугольника ABC удовлетворяет соотношению $S = a^2 - (b - c)^2$. Найти угол A .

1.30. На сторонах треугольника внешним образом построены квадраты. Доказать, что расстояние между центрами квадратов, построенных на боковых сторонах, равно расстоянию от центра квадрата, построенного на основании, до противоположной вершины треугольника.

1.31. В треугольнике ABC единичной площади проведен отрезок AD , пересекающий медиану CF в точке M , причем $FM = \frac{1}{4}CF$. Найти площадь треугольника ABD .

1.32. Доказать, что произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

1.33. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности. Найти сумму углов при большем основании трапеции.

1.34. Через центр квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N , причем $AN:NB = 1:2$. На этой прямой взята произвольная точка M , лежащая внутри квадрата. Доказать, что расстояния от точки M до сторон квадрата AB , AD , BC и CD , взятые в названном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

1.35. Квадрат и правильный треугольник, имеющие общую вершину, вписаны в окружность единичного радиуса. Найти площадь, покрытую и квадратом и треугольником.

1.36. В окружность вписаны равнобедренный остроугольный треугольник площади S и трапеция так, что ее большее основание совпадает с диаметром окружности, а боковые стороны параллельны боковым сторонам треугольника. Средняя линия трапеции равна l . Найти высоту трапеции.

1.37. Найти отношение площади трапеции $ABCD$ к площади треугольника AOD , где O — точка пересечения диагоналей трапеции, если известно, что $\frac{BC}{AD} = p$.

1.38. Два правильных многоугольника с периметрами a и b описаны около окружности, а третий правильный многоугольник вписан в эту окружность. Второй и третий многоугольники имеют каждый вдвое больше сторон, чем первый. Найти периметр третьего многоугольника.

1.39. Внутри угла AOB , меньшего π , дана точка M , находящаяся на расстоянии a от вершины угла. Отрезок OM образует со сторонами угла углы α и β . Найти радиус R окружности, проходящей через M и отсекающей на сторонах угла хорды, равные $2a$.

1.40. Из внешней точки A проведены две взаимно перпендикулярные секущие ABD и ACE к кругу с центром O . Площади треугольников ABC и ADE относятся, как $m:n$. Определить величины дуг BC и DE , каждая из которых меньше полуокружности.

1.41. Из точки A , лежащей на окружности радиуса r , проведены две хорды AC и AB . Эти хорды лежат по одну сторону от диаметра окружности, проходящего через точку A . Длина большей хорды равна b , а угол BAC равен α . Найти радиус окружности, которая касается хорд AB и AC и дуги BC .

1.42. Даны две концентрические окружности радиусов R и r ($R > r$). Найти сторону квадрата, две вершины которого лежат на одной окружности, а две другие — на другой. Найти, при каком соотношении между радиусами данных окружностей решение задачи возможно и при каком соотношении задача имеет единственное решение.

1.43. В сегмент, дуга которого содержит 120° , вписан квадрат. Определить сторону квадрата, если радиус круга равен $2 + \sqrt{19}$.

1.44. У равнобокой трапеции с большим основанием a высота вдвое меньше меньшего основания. На меньшем основании, как на диаметре, построена окружность. Найти радиус окружности, касающейся построенной окружности, большего основания и боковой стороны, если острый угол трапеции равен α .

1.45. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра окружности S_1 . С центром в точке D радиусом BD построена окружность S_2 . Из точки D проведены две прямые, пересекающие окружность S_1 в точках P и Q и дугу AB окружности S_2 , заключенную внутри окружности S_1 , в точках M и N . Точки P и Q спроектированы на AB ; P_1 и Q_1 соответственно — их проекции. Доказать, что фигура $PMNQ$ равновелика треугольнику P_1Q_1D .

1.46. Через точку P , лежащую вне окружности с центром O и радиусом R , проходят две взаимно перпендикуляр-

ные секущие. Первая секущая пересекает окружность в точках A и C (точка C лежит между P и A), а вторая секущая — в точках B и D (D лежит между P и B). Пусть P_1 — проекция P на AB , а M — одна из точек пересечения AB с окружностью, центр которой P_1 , а радиус P_1O . Найти длину MP .

1.47. Найти угол между двумя хордами, пересекающимися внутри окружности, если точка их пересечения удалена от центра окружности на $\frac{3}{5}$ ее радиуса и делит одну хорду пополам, а другую — в отношении 4:9.

1.48. Дан сектор OAB (O — центр) с центральным углом в 90° и радиусом, равным R . На отрезке OB , как на диаметре, построена полуокружность, лежащая внутри сектора. Найти радиус окружности, касающейся этой полуокружности и отрезков OA и AB .

1.49. В круге проведена хорда AB , пересекающая диаметр DE круга в точке M и наклоненная к нему под углом φ . Дано, что $\frac{MB}{MA} = \frac{p}{q}$, где p и q — известные числа. Из точки B проведена хорда BC , перпендикулярная к диаметру DE , и точка C соединена с точкой A . Найти площадь треугольника ABC , если радиус круга равен R .

Г л а в а 2

ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.1. Пункты A и B находятся по разные стороны от реки, ширина которой известна, а берега прямолинейны. В каком месте надо возвести мост через реку, чтобы путь от одного пункта в другой был кратчайшим?

2.2. Построить равносторонний треугольник ABC , если дана его сторона a и известно, что две стороны AB , AC и биссектриса AD (или их продолжения) проходят соответственно через три данные точки M , N , P , лежащие на одной прямой.

2.3. Построить треугольник по стороне a , высоте h_a и разности углов $B - C = \varphi$.

2.4. Построить треугольник ABC по стороне b , радиусу R описанной окружности и медиане m_c .

2.5. Построить треугольник, зная центры вписанной, описанной и внеписанной окружностей.

2.6. На сторонах AB и BC треугольника ABC построить соответственно точки D и E так, чтобы $AD = DE = EC$.

2.7. Через точку, лежащую внутри угла, провести прямую так, чтобы отсекаемый ею треугольник был наименьшей площади.

2.8. Построить треугольник по A , h_a и $2p$.

2.9. Внутри данного треугольника ABC найти точку P , сумма расстояний которой от вершин A , B и C была бы наименьшей.

2.10. Построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c и биссектрисе l прямого угла.

2.11. Построить четырехугольник, если известны три его стороны и два внутренних острых угла, прилежащих к четвертой стороне.

2.12. Из данной точки M , лежащей вне круга, провести секущую так, чтобы внешняя ее часть равнялась внутренней.

2.13. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы отрезок ее, заключенный внутри окружностей, имел данную длину a .

2.14. Через точку M внутри круга провести хорду так, чтобы разность ее отрезков равнялась данному отрезку.

2.15. Даны: окружность с центром O , две ее точки A и B и прямая CD , от которой окружность отсекает хорду CD (точки A и B лежат по одну сторону от CD). На окружности построить точку M так, чтобы отрезок PQ хорды CD , заключенный между хордами AM и BM , был равен данному отрезку a .

2.16. Даны: окружность с центром O , две ее точки A и B , прямая и ее точка M , лежащая внутри окружности. Найти на окружности такую точку C , что прямые AC и BC высекают на данной прямой отрезок, делящийся в точке M пополам.

2.17. Построить окружность, проходящую через данные точки A и B и касающуюся данной прямой PQ .

2.18. Пользуясь только линейкой, опустить перпендикуляр из точки M , лежащей вне окружности, на данный диаметр окружности (или на его продолжение).

2.19. Пользуясь только линейкой, опустить перпендикуляр из точки, лежащей на окружности, на данный диаметр окружности.

Г л а в а 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Прежде чем приступить к решению стереометрических задач, обратим внимание на следующие определения и теоремы.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости и теорему о трех перпендикулярах нужно формулировать так:

Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости.

Если проекция наклонной на плоскость перпендикулярна к прямой, лежащей в этой плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна к этой прямой.

Требование, чтобы прямые, лежащие в плоскости, и прямая, перпендикулярная к этим прямым, проходили через общую точку, излишне. Точно так же не следует требовать, чтобы наклонная, о которой идет речь в теореме о трех перпендикулярах, и прямая, лежащая в плоскости, проходили через общую точку.

Расстоянием между двумя прямыми AB и CD называется наименьшее из расстояний между двумя точками, одна из которых принадлежит AB , а другая CD .

Две прямые называются *параллельными*, если через них можно провести плоскость и они не пересекаются.

Две прямые называются *скрещивающимися*, если через них нельзя провести плоскость.

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми является длина отрезка, отсекаемого ими на прямой, перпендикулярной к обоим скрещивающимся прямым.

Последнее утверждение является теоремой, а не определением, и может быть доказано.

Во всех последующих задачах рассматриваются только *выпуклые* многогранники, т. е. такие, которые лежат по одну сторону от любой из его граней. Грани рассматриваемых многогранников являются выпуклыми многоугольниками.

Призмой называется многогранник, в котором две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани пересекаются между собой по параллельным друг другу прямым.

Второе требование в этом определении нельзя заменить условием: «остальные грани — параллелограммы», так как иначе пришлось бы отнести к призмам многогранник, составленный из двух равных наклонных параллелепипедов, симметричных относительно плоскости их общего основания, крест, образованный из пяти равных кубиков и т. п.

Если боковые ребра (грани) пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то высота пирамиды проектируется в центр описанной вокруг основания (вписанной в основание) окружности.

Если боковые ребра и грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то пирамида правильная.

Если все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом α , то $S_{\text{основания}} = S_{\text{боковой поверхности}} \cdot \cos \alpha$.

Треугольную пирамиду называют *тетраэдром*.

Правильным тетраэдром называется тетраэдр, у которого все ребра равны.

В задачах рассматриваются только прямые круговые конусы и цилиндры.

Конус (цилиндр) называется *равносторонним*, если его осевое сечение есть правильный треугольник (квадрат).

3.1. Через точку, лежащую на ребре двугранного угла α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), проходят два луча, расположенных в различных полуплоскостях его. Один из этих лучей перпендикулярен к ребру, а другой образует с ребром острый угол β . Найти угол между данными лучами.

3.2. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит в некоторой плоскости P , а катеты составляют с этой плоскостью углы α и β . Определить угол между плоскостью P и плоскостью треугольника.

3.3. Стороны угла α наклонены к плоскости P под углами β и γ . Найти косинус угла, который является проекцией угла α на плоскость P .

3.4. Даны четыре скрещивающиеся прямые: a , b , c и d . Построить прямую, параллельную a и одинаково удаленную от остальных трех прямых.

3.5. Равносторонний треугольник ABC со стороной, равной a , лежит на плоскости P . На перпендикуляре, восстановленном из точки A к плоскости P , отложен отрезок $AS = a$. Найти тангенс острого угла между прямыми AB и SC .

3.6. В пространстве даны два луча Ax и Bu , не лежащие в одной плоскости и образующие между собой угол 90° ; AB —их общий перпендикуляр. На лучах Ax и Bu взяты точки: M на Ax и P на Bu , такие, что $2AM \cdot BP = AB^2$. Доказать, что расстояние от середины O отрезка AB до прямой MP равно $\frac{1}{2}AB$.

3.7. Доказать, что четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

3.8. На плоскости P лежит правильный треугольник ABC со стороной a . Из точек B и C восстановлены перпендикуляры к плоскости P и на них отложены отрезки $CE = a\sqrt{2}$ и $BD = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (с одной стороны от плоскости P). Найти пло-

щадь треугольника DEA и косинус угла между плоскостью P и плоскостью этого треугольника.

3.9. Найти объем пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной a , если двугранные углы между плоскостью основания и боковыми гранями равны α , β и γ .

3.10. Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный треугольник ABC с площадью S и основанием $AB = a$. Две боковые грани пирамиды, опирающиеся на равные стороны основания, имеют при вершине пирамиды прямые углы. Найти угол, образованный третьей боковой гранью пирамиды и плоскостью основания, если объем пирамиды равен V .

3.11. В правильной треугольной пирамиде площадь основания равна $\sqrt{3}$, а угол бокового ребра с плоскостью основания в четыре раза меньше плоского угла при вершине. Найти площадь боковой поверхности.

3.12. В тетраэдр вписан другой тетраэдр так, что его вершины лежат в точках пересечения медиан граней первого тетраэдра. Найти отношение объемов тетраэдров.

3.13. В треугольную пирамиду вписана сфера радиуса r . Точки касания сферы лежат в точках пересечения высот граней. Сумма плоских углов при вершине пирамиды равна α . Доказать, что пирамида правильная, и найти ее боковое ребро.

3.14. Доказать, что в усеченной пирамиде сторона квадрата, равновеликого площади сечения пирамиды, проходящего через середину высоты пирамиды параллельно ее основанию, равна среднему арифметическому сторон квадратов, равновеликих основаниям пирамиды.

3.15. В пирамиде $ABCD$ дано: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a_1$, $DB = b_1$, $DC = c_1$. Найти косинус острого угла между скрещивающимися ребрами AD и BC этой пирамиды.

3.16. Плоскость, проходящая через одно из ребер правильного тетраэдра, делит его объем в отношении 3:5. Найти тангенсы углов α и β , на которые эта плоскость делит двугранный угол тетраэдра.

3.17. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Через ребро основания проведена внутри пирамиды плоскость, составляющая с основанием угол β . В каком отношении она делит площади

тех боковых граней, которые она рассекает на два треугольника?

3.18. Высота треугольной пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины D , проходит через точку пересечения высот треугольника ABC . Кроме того, известно, что $DB=b$, $DC=c$, $\angle BDC=90^\circ$. Найти отношение площадей граней ADB и ADC .

3.19. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы трехгранных углов с вершинами в точках A и B равны α , $AB=a$. Определить объем пирамиды.

3.20. Две грани треугольной пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольнички с общей гипотенузой AB . Двугранный угол при AB равен α . Найти двугранный угол, у которого ребро есть катет.

3.21. В треугольной пирамиде $SABC$ два плоских угла ASB и BSC при вершине S равны α , а третий плоский угол ASC равен $\frac{\alpha}{2}$. Ребро AS перпендикулярно к плоскости основания ABC . Найти угол BAC .

3.22. В тетраэдре $ABCD$ ребро $AB=6$, ребро $CD=8$, а остальные ребра равны $\sqrt{74}$. Найти радиус описанного шара.

3.23. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол между боковыми гранями равен α . Найти высоту данной пирамиды, если расстояние от основания высоты до бокового ребра равно a . Ответ привести к виду, удобному для логарифмирования.

3.24. В основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a . Одна боковая грань пирамиды представляет собой равнобедренный треугольник с боковой стороной b ($b \neq a$) и перпендикулярна к плоскости основания. Найти площадь сечения, которое является квадратом и пересекает эту грань по прямой, параллельной основанию.

3.25. Боковые ребра треугольной пирамиды равны a , b , c . Плоские углы при вершине прямые. В пирамиду вписан куб так, что одна его вершина находится в вершине пирамиды, а противоположная — лежит в плоскости основания пирамиды. Найти ребро куба.

3.26. В правильную треугольную пирамиду с высотой h вписан куб с ребром a . Найти объем пирамиды.

3.27. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α . В эту пирамиду вписан куб так, что его вершины лежат на апофемах пирамиды. Найти ребро куба.

3.28. Найти объем тетраэдра $ABCD$, если $BC=AD=a$, $CA=DB=b$, $AB=DC=c$.

3.29. В пирамиде $ABCD$ объем $V=48$, $AB=12$, $CD=8$. Расстояние между AB и CD равно 6. Найти угол между ребрами AB и CD .

3.30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость A_1BC . В образовавшуюся над этой плоскостью часть призмы вписан шар радиуса R . Найти объем призмы.

3.31. Ребро правильного тетраэдра равно a . Найти радиус шара, касающегося всех ребер тетраэдра.

3.32. В прямоугольный параллелепипед с ребрами a , b и c помещен куб так, что вершина O куба совпадает с вершиной параллелепипеда. Найти угол между диагоналями куба и параллелепипеда, проведенными через вершину O .

3.33. Сторона треугольника равна a . Разность прилежащих к ней углов равна φ . На треугольнике, как на основании, построена прямая призма. Через ребро призмы, противоположное стороне a , проведено сечение площади S , которое делит двугранный угол пополам. Найти объем призмы.

3.34. Найти расстояние между двумя непересекающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно a .

3.35. Ребро куба равно a . Сфера с центром в точке O делит три ребра куба, сходящихся в вершине A , пополам. Из одной такой точки деления K опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую через вершину A . Угол между этим перпендикуляром и радиусом сферы OK делится ребром куба пополам. Найти радиус сферы.

3.36. Около правильного тетраэдра описан цилиндр так, что два противоположных ребра тетраэдра являются диаметрами оснований цилиндра. Найти отношение объема тетраэдра к объему цилиндра.

3.37. Доказать, что объем правильной пирамиды меньше куба ее бокового ребра.

3.38. Два шара, отношение радиусов которых равно p , касаются друг друга внешним образом. Они помещены внутри конуса так, что центры их находятся на оси конуса; при

этом первый шар касается боковой поверхности конуса, а второй — боковой поверхности и основания конуса. Найти отношение суммы площадей поверхностей этих шаров к площади полной поверхности конуса.

3.39. Сфера вписана в прямой круговой конус с углом α при вершине осевого сечения. В эту сферу вписан конус с таким же углом при вершине осевого сечения. Найти угол α , если отношение объема первого конуса к объему второго конуса равно a . При каких значениях a задача имеет решение?

3.40. Около прямого кругового конуса, высота которого равна радиусу основания, описана пирамида. Площадь полной поверхности конуса равна половине площади полной поверхности пирамиды. Площадь боковой поверхности конуса равна $\pi\sqrt{2}$. Найти объем пирамиды.

3.41. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности конуса и остальных четырех шаров. Найти объем конуса, если радиусы шаров равны r .

3.42. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a . Ребро $SD = h$ перпендикулярно к плоскости основания. Внутри пирамиды лежит цилиндр так, что окружность одного его основания вписана в треугольник SCD , а окружность другого касается грани SAB . Найти высоту цилиндра.

3.43. В конус вписан куб так, что одно его ребро лежит на диаметре основания конуса, вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности конуса, а центр куба лежит на высоте конуса. Найти отношение объема конуса к объему куба.

3.44. В правильную усеченную треугольную пирамиду вписан шар радиуса r . Боковое ребро пирамиды равно стороне меньшего основания. Найти объем пирамиды.

3.45. Два шара радиуса r и один шар радиуса R ($R > r$) лежат на плоскости, касаясь друг друга внешним образом. Найти радиус шара, касающегося всех шаров и плоскости.

3.46. Две равные сферы касаются друг друга и граней двугранного угла. Третья сфера меньшего радиуса также касается граней этого двугранного угла и касается обеих

это точка R . Другую точку найдем, если продолжим до пересечения отрезки DC и PQ . Это можно сделать, так как указанные отрезки лежат в одной плоскости и, как видно из рис. 4.1, не параллельны. Полученная в результате точка S будет лежать в плоскости нижнего основания, так как вся прямая DC лежит в этой плоскости.

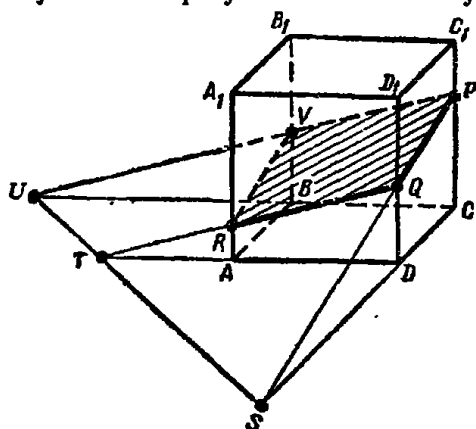


Рис. 4.2.

Через точки R и S мы теперь проведем след, который плоскость сечения оставит на плоскости нижнего основания. В результате получим точку T . После того как точки T и F соединены, сечение построено.

Несколько усложним задачу.

Пример 2. Построить сечение куба, проходящее через точки P , Q и R , расположенные так, как показано на рис. 4.2.

В этом случае одной вспомогательной точки окажется недостаточно. Хотя из рис. 4.2 видно, что сечение не пересечет плоскость нижнего основания, нужно построить след плоскости сечения на нижнем основании. Точку S мы построим так же, как в примере 1, а вторую точку T найдем, продолжив отрезки RQ и AD . След ST пересечет прямую BC в точке U . Так как точки U и P лежат в плоскости сечения, то, соединив их, найдем точку V , принадлежащую сечению куба, которая позволит завершить построение.

Пример 3. Построить сечение куба, проходящее через точку R , расположенную на передней грани куба, и точки P и Q — на ребрах задней его грани (рис. 4.3).

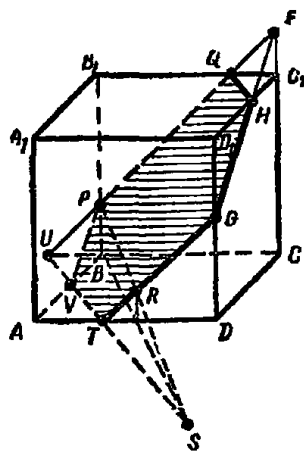


Рис. 4.3.

И на этот раз нас выручит построение следа плоскости сечения на плоскости нижнего основания. Чтобы было ясно, что точка R лежит на плоскости передней грани куба, спроектируем ее на основание. Проекция прямой PR и прямая PR пересекутся в точке S , принадлежащей следу. Вторую точку U следа мы получим, продолжив до пересечения BC и PQ . След US пересечет куб по отрезку VT . Продолжим TR до пересечения с DD_1 в точке G . Чтобы закончить построение, получим еще одну вспомогательную точку F так, как это было сделано в первом примере.

Построение теней осуществляется с помощью тех же самых приемов. При этом нужно в качестве вспомогательной точки использовать проекцию источника света на плоскость, на которую падает тень.

Построим, например, тень, отбрасываемую вертикальной спичкой AB на плоскость P (концом B спичка упирается в плоскость), если источник света расположен в точке Q (рис. 4.4, а). Для этого

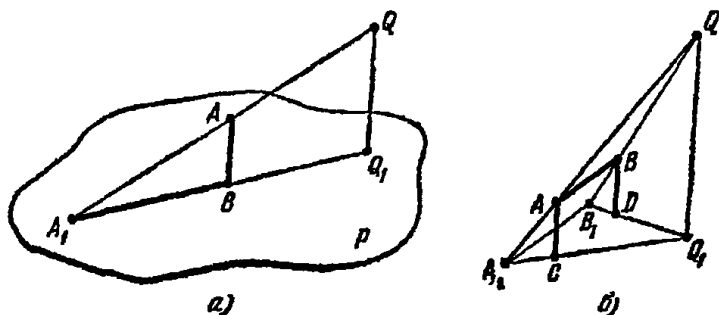


Рис. 4.4.

спроектируем точку Q на плоскость P и проведем две прямые AQ и BQ_1 , пересекающиеся в точке A_1 . Отрезок A_1B и будет тенью спички AB .

Если спичка AB расположена между плоскостью P и источником света Q произвольным образом, то построение тени показано на рис. 4.4, б. Вместо того чтобы строить тень спички AB , мы строим тени A_1C и B_1D двух вертикальных спичек AC и BD , а затем, соединив точки C и D , получаем нужную тень.

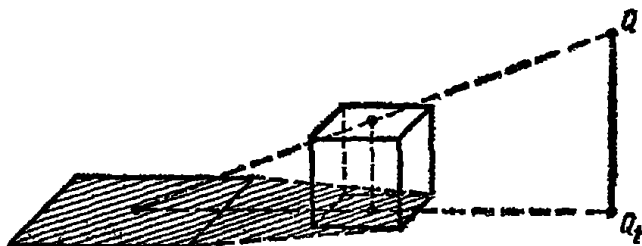


Рис. 4.5.

Пример 4. Источник света расположен над плоскостью нижнего основания куба в точке Q на высоте, вдвое превышающей ребро куба (рис. 4.5). Построить тень, отбрасываемую кубом на плоскость его нижнего основания.

Разумеется, можно было бы построить отдельно тени, отбрасываемые каждым вертикальным ребром куба, а затем соединить соответствующие вершины. Однако здесь проще воспользоваться тем,

что ребра верхнего основания куба параллельны плоскости нижнего основания. Следовательно, тенью, отбрасываемой верхним основанием куба, будет квадрат. Поскольку QQ_1 вдвое больше ребра куба, то сторона этого квадрата будет $2a$ (докажите).

Если мы проведем в кубе линию центров оснований и построим отбрасываемую ею тень, то не составит труда вычертить тень, отбрасываемую всем верхним основанием, а затем и всем кубом (рис. 4.5).

4.1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через вершину A , середину ребра BC и центр грани $CC_1 D_1 D$ проходит секущая плоскость. Найти отношение, в котором она делит объем куба.

4.2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным единице. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$.

4.3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость через вершину A , центр верхнего основания $A_1 B_1 C_1 D_1$ и центр боковой грани $BB_1 C_1 C$. Пусть E — точка пересечения секущей плоскости с ребром $B_1 C_1$. Найти отношение $B_1 E$ к EC_1 .

4.4. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Сторона CD продолжена на расстояние $MD = 2CD$ ($MC = 3CD$). Через точку M , вершину B и середину ребра SC проведена плоскость. Найти отношение объемов частей пирамиды, полученных при пересечении ее этой плоскостью.

4.5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Через точки A , D и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4.6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На продолжении ребер AB , AA_1 , AD отложены соответственно отрезки BP , $A_1 Q$, DR длины $1,5 AB$. Через точки P , Q , R проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

4.7. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S . Вычислить площадь сечения, проходящего через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани.

4.8. В треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ боковое ребро равно l . В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной b , а прямая, проходящая через вершину B_1 и центр основания ABC , перпендикулярна к основаниям. Найти площадь сечения, проходящего через ребро AB и середину ребра CC_1 .

4.9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ — основания) даны длины ребер $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Пусть точка O — центр основания $ABCD$,

O_1 — центр основания $A_1B_1C_1D_1$, F — точка, делящая отрезок O_1O в отношении 1:3. Найти площадь сечения данного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку F параллельно его диагонали AC_1 и диагонали BD основания.

4.10. В точке E , находящейся на расстоянии $2h$ от плоскости основания куба с ребром h и на расстоянии $R > 2h$ от прямой, соединяющей центры оснований куба, помещен источник света. Докажите, что тень, отбрасываемая кубом на плоскость основания, будет иметь наибольшую площадь, когда плоскость, проходящая через центр куба, точку E и одну из вершин, перпендикулярна к плоскости основания.

Г л а в а 5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА

5.1. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра O круга на хорды, проходящие через данную точку N внутри круга.

5.2. На плоскости зафиксированы две различные точки A и B . Найти геометрическое место точек M , для каждой из которых $AM \cdot BM \cos \angle AMB = \frac{3}{4} AB^2$.

5.3. На плоскости зафиксированы две различные точки A и B . Доказать, что геометрическое место точек M , удовлетворяющих условию $2AM^2 + MB^2 = AB^2$, есть окружность с диаметром AC , где точка C лежит на отрезке AB , причем, $\frac{AC}{BC} = 2$.

5.4. Дан треугольник ABC . Найти геометрическое место точек M таких, что площади треугольников AMB и BMC равны.

5.5. На плоскости даны два отрезка: AB и CD . Найти геометрическое место точек M плоскости, для которых площади треугольников ABM и CDM равны.

5.6. Дан куб с ребром a . Найти геометрическое место середин отрезков длины l , один из концов которых лежит на диагонали верхнего основания, а другой — на не параллельной ей диагонали нижнего основания.

Г л а в а 6

СВОЙСТВА ЧИСЕЛ. ДЕЛИМОСТЬ

6.1. Доказать, что $p^2 - 1$ делится на 24, если p — простое число, большее трех.

6.2. Доказать, что $n^3 + 2n$ при любом натуральном n делится на 3.

6.3. Доказать, что число $3^{103} + 4^{103}$ делится на 49 и 181.

6.4. Сколько в числе 500! содержится множителей 2?

6.5. Делится ли число $\underbrace{10 \ 10 \ 10 \dots 10}_{30 \text{ раз}} 1$ на 81?

6.6. Определить, при каких целых значениях n выражение $n^4 + 4$ является простым числом.

6.7. Доказать, что $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ является целым числом при любом четном n .

6.8. При каких значениях x дробь $\frac{2x+3}{5x+7}$ сократима?

6.9. Найти все пятизначные числа вида $\overline{34x5y}$ (x — цифра сотен, y — цифра единиц), которые делятся на 36.

6.10. Найти трехзначное число $\overline{abc}$ (a , b и c — его цифры), если четырехзначное число $\overline{abci}$ в три раза больше четырехзначного числа $\overline{2abc}$.

Г л а в а 7

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Следующие ниже замечания относятся не только к этой главе, они имеют общий характер.

Множества точек x числовой оси, удовлетворяющих неравенствам 1. $a < x < b$; 2. $a \leq x \leq b$; 3. $a \leq x < b$; 4. $a < x \leq b$; 5. $x > a$; 6. $x < a$; 7. $x \geq a$; 8. $x \leq a$, где $a < b$, называются *интервалами* и обозначаются соответственно (a, b) ; $[a, b]$; $[a, b)$; $(a, b]$; $(a, +\infty)$; $(-\infty, a)$; $[a, +\infty)$; $(-\infty, a]$. Интервалы 1, 5 и 6 называются *открытыми*; интервал 2 называется *замкнутым*; интервалы 3, 4, 7 и 8 называются *полуоткрытыми*. Иногда вместо терминов: открытый интервал, замкнутый интервал, полуоткрытый интервал употребляют соответственно термины: *промежуток* (или *интервал*), *отрезок* (или *сегмент*), *полуотрезок*.

По определению

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Для арифметического корня имеет место формула

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Иногда приходится пользоваться формулами куба суммы и разности чисел в виде

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b); \quad (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

Следующая формула называется *формулой сложного радикала*:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

(все подкоренные выражения должны быть неотрицательными).

По определению

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

где $a \geq 0$, m , n — натуральные и корень арифметический. Из этого определения следует, что *степени с отрицательным основанием и дробным показателем считаются не имеющими смысла*. Напри-

мер $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не имеет смысла, в то время как $\sqrt[3]{-8} = -2$.

По определению

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}} \quad \text{при } a \neq 0, \quad \alpha > 0.$$

По определению

$$a^0 = 1 \quad \text{при } a \neq 0.$$

Действия с корнями вызывают обычно серьезные недоразумения, преодолеть которые можно, введя понятие главного корня.

Главным корнем из положительного числа называется арифметический корень из этого числа.

Главным корнем нечетной степени из отрицательного числа называется действительный (следовательно, отрицательный) корень из этого числа.

Главным корнем четной степени из отрицательного числа называется тот из мнимых корней, который имеет наименьший главный аргумент (см. стр. 71).

Удобно согласиться о том, что, как правило, знак корня из действительного числа используется для обозначения *главного корня*. Это соглашение не распространяется на действия с комплексными числами, где знак корня n -й степени используется для обозначения алгебраического корня из числа, т. е. корень имеет n различных значений.

Таким образом, $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt{-1} = i$, так как корней квадратных из -1 два: i и $-i$, но у i главный аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, а у $-i$ он равен $\frac{3\pi}{2}$, т. е. i имеет меньший главный аргумент.

Для главных корней из положительных чисел и главных корней нечетной степени из отрицательных чисел справедливо правило умножения и деления корней:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Для главных корней четной степени из отрицательных чисел эти правила не справедливы. Действительно, если бы эти правила были справедливы, то было бы $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$, но $\sqrt{-1} = i$, и поэтому $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$.

Правило, заключающееся в том, что показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить на одно и то же натуральное число, справедливо для арифметических корней и не справедливо для главных корней из отрицательных чисел.

Если один из перемножаемых корней $\sqrt[n]{a}$ арифметический, то справедливо правило умножения корней

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

где b может быть отрицательным, а n — любое натуральное число.

7.1. Упростить выражение

$$A = \frac{n^3 - 3n + (n^2 - 1) \sqrt{n^2 - 4} - 2}{n^3 - 3n + (n^2 - 1) \sqrt{n^2 - 4} + 2}.$$

7.2. Упростить выражение

$$A = \left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4} - \frac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x} \right) : \left(\frac{1+x}{x^3+x^4+x^5} - \frac{1-x+x^2}{x^3} \right).$$

7.3. Упростить выражение

$$\begin{aligned} & \left(\frac{63}{256} x^2 - \frac{21}{128} x^4 - \frac{21}{160} x^6 + \frac{9}{80} x^8 + \frac{1}{10} x^{10} \right) (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + \\ & + \left(\frac{63}{256} - \frac{63}{128} x^2 + \frac{105}{160} x^4 - \frac{63}{80} x^6 + \frac{9}{10} x^8 \right) (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \\ & - \frac{63}{256} [1+x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}] [x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}]^{-1}. \end{aligned}$$

После упрощения определить его знак в зависимости от x .

7.4. Упростить выражение

$$\frac{a+2\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ab}}-2\sqrt{b}.$$

7.5. Упростить выражение

$$\left(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}}\right)^2-4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},$$

где $x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}$, $a>1$, $m\neq n$, $m\neq 0$, $n\neq 0$.

7.6. Вычислить значение выражения

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \quad \text{при } 1\leq x\leq 2.$$

7.7. Преобразовать выражение

$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$$

так, чтобы оно не содержало сложных радикалов.

7.8. Разложить на линейные относительно x , y , z , u множители выражение

$$(xy+zu)(x^2-y^2+z^2-u^2)+(xz+yu)(x^2+y^2-z^2-u^2).$$

7.9. Разложить в области комплексных чисел на линейные множители выражение

$$(x+y)^4+x^4+y^4.$$

7.10. Разложить в области комплексных чисел на линейные множители выражение

$$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5.$$

7.11. Доказать, что

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3.$$

7.12. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

$$a^5(b^3+c^3)+b^5(a^3+c^3)+c^5(b^3+a^3)=\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{2}.$$

7.13. Доказать, что при всех действительных значениях x и y имеет место равенство

$$|x+y|+|x-y|=|x+\sqrt{x^2-y^2}|+|x-\sqrt{x^2-y^2}|.$$

7.14. Доказать, что

$$\left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| = |x| + |y|$$

для любых действительных x и y , имеющих одинаковые знаки.

Глава 8

ДЕЛИМОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ. ТЕОРЕМА БЕЗУ. ЦЕЛЫЕ УРАВНЕНИЯ

Многочлен $S(x)$ называется *частным*, а многочлен $R(x)$ — *остатком* от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если равенство

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$$

является тождеством и степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

Обобщенная теорема Виета. Для корней $x_1, x_2, \dots, x_n$ уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

имеют место формулы:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

.....

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Для уравнения $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$ верна теорема: если уравнение имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, то p является делителем свободного члена a_n ,

а q — делителем коэффициента a_0 .

В частности, если $a_0 = 1$, то уравнение может иметь только такие целые корни, которые являются делителями свободного члена a_n .

8.1. Решить уравнение

$$(x - 4,5)^4 + (x - 5,5)^4 = 1.$$

8.2. Решить уравнение

$$(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) = 4.$$

8.3. Доказать, что уравнение

$$x^2 - 3y^2 = 17$$

не имеет решений в целых числах.

8.4. Найти все целые решения уравнения

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 100.$$

8.5. Найти остаток от деления многочлена $x^{99} + x^8 + 10x + 5$ на многочлен $x^2 + 1$.

8.6. Определить все такие целые числа a и b , для которых один из корней уравнения $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$.

8.7. В уравнении

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 2 = 0$$

один из корней равен $\sqrt{3} + 1$. Найти остальные корни уравнения, если a и b — рациональные числа.

8.8. При каких значениях a оба корня уравнения

$$x^2 - (a + 1)x + a + 4 = 0$$

отрицательны?

8.9. Найти соотношение между a , b и c , если корни уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

образуют геометрическую прогрессию.

8.10. Известно, что уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет корни α_1 , α_2 , α_3 . Выразить сумму $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ через p и q .

8.11. При каких a и α трехчлен $x^3 + ax + 1$ делится на двучлен $x - \alpha$ без остатка и частное от деления при всех x больше нуля.

8.12. Остаток от деления многочлена относительно x на $x - 2$ равен пяти, а остаток от деления этого же многочлена на $x - 3$ равен семи. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x - 2)(x - 3)$.

8.13. Найти все действительные значения p и q , при которых $x^4 + 1$ делится на $x^2 + px + q$.

8.14. Доказать, что многочлен

$$x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1,$$

где n натуральное, делится на $(x - 1)^3$.

8.15. Найти все натуральные значения n , при которых многочлен $(x+1)^n - x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

8.16. Определить p и q так, чтобы многочлен

$$6x^4 - 7x^3 + px^2 + 3x + 2$$

делился без остатка на $x^2 - x + q$.

Г л а в а 9

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Равенства. Тождества. Два математических выражения, соединенных знаком $=$, образуют *равенство*.

Примеры равенств:

$$a^2 + b^2 = c^2, 3=3, 3=5, \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}, \sin x = 3.$$

Числовое равенство может быть *истинным* (верным) или *ложным* (неверным). Равенство $3=3$ истинное, равенство $3=5$ ложное.

Буквенное равенство при различных значениях входящих в него букв также принимает одно из двух значений: «истина» или «ложь». Например, равенство $a^2 + b^2 = c^2$ при $a=3, b=4, c=5$ истинно, а при $a=3, b=4, c=6$ ложно. Равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ истинно при всех значениях x , а равенство $\sin x = 3$ всегда ложно.

Если какая-либо часть равенства (или обе части одновременно) перестает существовать, то равенство становится ложным. Равенство

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \text{ ложно при } x = \frac{k\pi}{2}, \text{ так как для четных } k \text{ не существует}$$

$\operatorname{ctg} x$, а для нечетных k не существует $\operatorname{tg} x$. Равенство $\frac{x^2-1}{x+1} = x-1$ ложно при $x=-1$, так как его левая часть теряет смысл при этом значении x (обратите внимание, что правая часть существует всегда). Обе части равенства $\sin x = 3$ всегда имеют смысл, однако это равенство всегда ложно.

Для каждого математического выражения можно указать множество значений входящей в него буквы (или нескольких букв), при которых это выражение существует, т. е. принимает некоторое числовое значение. Такое множество мы будем называть (*естественной*) *областью определения* рассматриваемого математического выражения.

Для выражения $\frac{x^2-1}{x+1}$ областью определения является числовая ось с выколотой точкой $x=-1$.

Для выражения $\log_y \sqrt{x}$ найти область определения уже несколько сложнее. Во-первых, из числа x извлекается квадратный корень. Эта операция возможна, если $x \geq 0$. Чтобы затем можно

было найти логарифм от $\sqrt{x}$, необходимо $\sqrt{x} > 0$. Оба условия выполняются при $x > 0$. В основании логарифма может стоять лишь положительное число, отличное от единицы. Таким образом, получаем область определения: $x > 0, y > 0, y \neq 1$.

Два математических выражения называются *тождественными*, если

- 1) их области определения совпадают,
- 2) они принимают одинаковые числовые значения при подстановке в каждое выражение одного и того же набора значений входящих в него букв, произвольно выбранного из области определения.

Равенство, в котором правая и левая части являются тождественными выражениями, называется *тождеством*.

Для обозначения тождественного равенства используется символ $\equiv$.

Примеры тождеств: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

$$\lg(-|x|) = \frac{1}{\sqrt{-|x|}}.$$

Первые два тождества общеизвестны. Последнее равенство тоже является тождеством. В самом деле, область определения левой части не содержит ни одной точки, область определения правой части тоже не содержит ни одной точки. Поскольку область определения правой и левой частей — пустые множества, то требование

2) в определении тождественных выражений выполняется. Равенство $\frac{x^2-1}{x+1} = x-1$, как мы видели, истинно при всех x кроме $x = -1$.

Оно не является тождеством, так как требование 1) не удовлетворено.

Введем понятие неабсолютного тождества.

Пусть в нашем распоряжении есть два математических выражения, имеющих разные области определения. Обозначим через U их общую часть. Если на множестве U значения обоих математических выражений совпадают, то говорят, что они *неабсолютно тождественны*, а соответствующее равенство называют *неабсолютным тождеством*.

Характерным примером неабсолютного тождества является соотношение

$$\lg xy = \lg x + \lg y.$$

Область определения правой части: $x > 0, y > 0$. Область определения левой части: $x > 0, y > 0; x < 0, y < 0$. Общая часть областей определения: $x > 0, y > 0$. На этой общей части приведенное соотношение превращается в истинное равенство.

Напомним определение тождества, которым обычно пользуются в средней школе.

Тождеством называется равенство, справедливое при всех значениях входящих в него букв, при которых обе его части имеют смысл.

Нетрудно заметить, что это определение совпадает с приведенным выше определением неабсолютного тождества. Чтобы подчеркнуть, что мы пользуемся другим определением тождества, будем иногда

вместе термина *тождество* употреблять термин *абсолютное тождество*.

Упражнения¹⁾. Какие из следующих равенств являются абсолютными тождествами, а какие — неабсолютными? Приведите доказательство сделанного вами вывода.

$$1. \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$2. \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$3. \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x},$$

$$4. \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$5. \sec x \cos x = 1,$$

$$6. \sec x - \frac{1}{\cos x} = 0,$$

$$7. \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

$$8. \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

$$9. \operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x},$$

$$10. \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$11. \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x},$$

$$12. \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x},$$

$$13. \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}},$$

$$14. \lg xy = \lg |x| + \lg |y|,$$

$$15. \lg x^2 = 2 \lg x,$$

$$16. \lg x^2 = 2 \lg |x|.$$

Уравнение, корни уравнения, равносильность. Когда мы говорим, что равенство

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

является уравнением относительно буквы x , то подразумеваем, что для фиксированных a , b и c (эти буквы являются *параметрами уравнения*) нужно отыскать значения x , обращающие (1) в истинное числовое равенство.

Другими словами, предполагают, что для букв a , b и c выбраны определенные, хотя и произвольные значения, в то время как буква x , которой обозначено *неизвестное*, остается «свободной». Вместо нее можно подставлять различные числа, в результате чего возникнут либо истинные, либо ложные числовые равенства. Равенство (1) выполняет роль «формы» (или «схемы») уравнений, которая превращается в уравнение, как только мы остановим свой выбор на конкретных значениях параметров. Если выбор значений параметров уже сделан, то полученное уравнение можно рассматривать как «форму» числовых равенств — ложных или истинных.

Часто представляют себе уравнение как равенство двух функций (в частности, как равенство функции нулю), а не как форму. Такое представление недостаточно точно, так как может привести к потере корней.

¹⁾ Ответы к упражнениям 1—21 см. на стр. 293—295.

Например, уравнение

$$x^{2x} = 1 \quad (2)$$

имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, в то время как функция x^{2x} определена только при положительных x . Подробнее об этом см. главу 12.

Если же уравнение (2) мы рассматриваем как форму, порождающую числовые равенства, то при $x = -1$ слева получим выражение $(-1)^{-2}$, которое имеет смысл и равно 1.

Приведем некоторые определения.

Пусть $x, y, z, \dots$ — неизвестные в уравнении

$$f(x, y, z, \dots) = 0. \quad (3)$$

Набор значений неизвестных

$$\begin{cases} x = a, \\ y = b, \\ z = c, \\ \dots \end{cases}$$

называется *решением* уравнения (3), если

$$f(a, b, c, \dots) = 0 \quad (3')$$

является истинным числовым равенством.

Решение уравнения с одним неизвестным называют также *корнем* этого уравнения.

Корнем уравнения $3x^2 + 2x - 1 = 0$ является число $x = -1$, решением уравнения $2y^2 - 3xy + x^2 = 0$ является система чисел

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Решить уравнение — значит найти все его решения или доказать, что оно не имеет решений.

Два уравнения называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений. Другими словами, любое решение первого уравнения является также решением второго уравнения и, наоборот, любое решение второго уравнения является также решением первого уравнения.

Вообще говоря, понятие равносильности тесно связано с определенной областью чисел. Так, уравнения $x - 1 = 0$ и $(x - 1)(x^2 + 1) = 0$ равносильны в области действительных чисел и неравносильны в области комплексных чисел.

Говорят, что второе уравнение является *следствием* первого если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения.

В процессе решения уравнение можно заменить любым равносильным ему уравнением. Легко убедиться в том, что замена входящего в уравнение математического выражения тождественным¹⁾ приводит к равносильному уравнению.

¹⁾ Имеется в виду применение абсолютного тождества, см. стр. 33—34.

Во многих случаях удобно заменить данное уравнение его следствием. В результате такой замены могут появиться посторонние корни, т. е. такие числа, которые являются корнями следствия, но не удовлетворяют исходному уравнению. Чтобы отсеять посторонние корни, следует сделать проверку всех найденных значений неизвестного.

Замена входящего в уравнение выражения неабсолютно тождественным может нарушить равносильность. В результате у уравнения, с одной стороны, могут появиться посторонние корни, а с другой стороны, корни могут быть потеряны.

Например, применение неабсолютного тождества ¹⁾

$$\log x + \log y = \log xy$$

приводит к следствию, в то время как применение этого же тождества справа налево

$$\log xy = \log x + \log y$$

может повлечь за собой потерю решений. В первом случае в результате замены $\log x + \log y$ на $\log xy$ мы можем приобрести решения, лежащие в области $x < 0, y < 0$. Во втором случае решения из той же самой области могут быть потеряны.

При решении большинства уравнений угроза приобретения посторонних корней не должна нас пугать, так как в наших руках есть такое надежное средство, как проверка. Гораздо более опасной является перспектива потери решений.

Избежать потери корней можно, если вместо неабсолютных тождеств, сужающих область определения, пользоваться неабсолютными тождествами, расширяющими естественную область определения уравнения.

Вернемся к рассмотренному только что примеру с суммой логарифмов. Когда при решении уравнения приходится потенцировать, то неабсолютное тождество

$$\log x + \log y = \log xy$$

не приводит к потере корней. Если же по ходу преобразований возникла необходимость прологарифмировать произведение, то нужно воспользоваться другим неабсолютным тождеством

$$\log xy = \log |x| + \log |y|,$$

применение которого может лишь расширить область определения уравнения.

Есть второй прием, позволяющий избежать потери решений, который мы поясним на примере уравнения: $\sin 2x + 7 \cos 2x + 7 = 0$. Воспользуемся формулами, позволяющими выразить $\sin 2x$ и $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$. Получим

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{7(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 7 = 0.$$

¹⁾ Под применением тождества мы понимаем замену его левой части на правую.

Приведя к общему знаменателю и отбросив знаменатель, который всегда отличен от нуля, получим простое уравнение

$$\operatorname{tg} x = -7,$$

откуда $x = -\operatorname{arctg} 7 + \pi k$.

Хотя все произведенные преобразования кажутся законными, мы легко убедимся в том, что целая серия корней $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ потеряна. Достаточно подставить эти значения неизвестного в исходное уравнение.

Корни были потеряны в результате применения неабсолютных тождеств

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{и} \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

левые части которых существуют всегда, а правые теряют смысл именно при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Если по каким-то причинам мы не могли избежать применения неабсолютных тождеств, грозящих потерей корней, то нам не остается ничего иного, как проверить те значения неизвестного, которые оказались исключенными из области определения входящих в уравнение выражений. В нашем примере, как и в большинстве тригонометрических уравнений, это нетрудно сделать.

Наконец, отметим такой важный момент при решении уравнений, как правильное использование условий.

Уравнение

$$\lg(1+x) + 3 \lg(1-x) = \lg(1-x^2) - 2$$

удобнее всего решать, преобразовав $\lg(1-x^2)$ в сумму логарифмов. Чтобы оградить себя от возможной потери корней, мы должны написать

$$\lg(1-x^2) = \lg|1+x| + \lg|1-x|.$$

Однако подобная осторожность в этом примере является излишней. Поскольку в уравнение наряду с выражением $\lg(1-x^2)$ входят $\lg(1+x)$ и $\lg(1-x)$, то $1+x$ и $1-x$ должны быть положительными, чтобы левая часть уравнения имела смысл. Поэтому вместо $\lg|1+x|$ и $\lg|1-x|$ можно написать $\lg(1+x)$ и $\lg(1-x)$. Таким образом, данное уравнение принимает вид

$$\lg(1+x) + 3 \lg(1-x) = \lg(1+x) + \lg(1-x) - 2.$$

Приведя подобные члены, получим

$$2 \lg(1-x) = -2,$$

откуда $x = 0,9$ — единственный корень данного уравнения.

На этом примере мы видим, что правильное использование условия позволяет быстрее достигнуть цели, чем в случае чисто формальных преобразований.

Однако достаточно ли обоснованным было приведенное выше решение? Чтобы убедиться в этом, решите самостоятельно такое

уравнение

$$\lg(1+x) + 3 \lg(1-x) = \lg(1-x^2) + 2.$$

Оно отличается от предыдущего лишь знаком последнего члена. Поэтому, повторив все приведенные только что рассуждения, получим

$$2 \lg(1-x) = 2,$$

откуда $x = -9$. Подставив это значение x в исходное уравнение, убеждаемся в том, что нами найден посторонний корень. Пронзошло это потому, что уравнения

$$\lg(1+x) + 3 \lg(1-x) = \lg(1+x) + \lg(1-x) + 2$$

и

$$2 \lg(1-x) = 2$$

неравносильны. Равносильность нарушилась в результате уничтожения в правой и левой частях уравнения члена $\lg(1+x)$, который существенно ограничивал область определения уравнения. Таким образом, проверка здесь является необходимой частью решения.

Разобранный пример нередко предлагают решать так. Найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} 1+x > 0, \\ 1-x > 0, \text{ т. е. } -1 < x < 1. \\ 1-x^2 > 0, \end{cases}$$

Теперь будем применять к уравнению те преобразования, которые не могут привести к потере корней:

$$\begin{aligned} \lg(1+x) + \lg(1-x)^3 &= \lg(1-x^2) + \lg 100, \\ \lg[(1+x)(1-x)^3] &= \lg 100(1-x^2), \\ (1+x)(1-x)^3 &= 100(1-x^2). \end{aligned}$$

Решая последнее уравнение, найдем $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -9$, $x_4 = 11$. Так как все четыре числа не попали в интервал $-1 < x < 1$, то исходное уравнение не имеет корней.

Для данного уравнения такой метод решения оказывается верным, так как позволяет отбросить все найденные значения x . Однако основан он на ошибочном убеждении, что в процессе преобразований могут быть приобретены лишь такие посторонние корни, которые не попадают в область определения исходного уравнения.

Приведем два примера.

Вначале рассмотрим уравнение $\arcsin x = \frac{\pi}{3} + \arcsin \frac{x}{2}$. Его

область определения — отрезок $-1 \leq x \leq 1$. Возьмем синусы от правой и левой частей уравнения, в результате чего получим следующие

$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \arcsin \frac{x}{2}\right), \text{ т. е. } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{4}.$$

Решая последнее уравнение, получим $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Оба значения x принадлежат области определения исходного уравнения, однако $x_2 = 1$ — посторонний корень, в чем легко убедиться проверкой.

Решим теперь в области действительных чисел уравнение

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$$

Областью определения этого уравнения является вся числовая ось. Возведем данное уравнение в куб:

$$x+1+3x+1+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{3x+1}(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1})=x-1.$$

В последнее уравнение входит выражение $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}$, являющееся левой частью данного уравнения. Заменяем его правой частью этого уравнения. Получим

$$\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-1}=-(x+1).$$

Возведя в куб, получим

$$(x+1)(3x+1)(x-1)=-(x+1)^3,$$

откуда

$$x_1 = -1, x_2 = 0.$$

Проверка убеждает нас в том, что корень $x_2 = 0$ является посторонним. Он появился в результате замены левой части данного уравнения на не равную ей тождественно правую часть.

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что нахождение области определения уравнения (или, как иногда говорят, области допустимых значений—ОДЗ) не гарантирует нас от появления посторонних корней, т. е. не избавляет от необходимости делать проверку полученных в результате решения корней.

Это не означает, что находить область определения всегда бессмысленно. Можно привести много примеров, когда знание области определения существенно упрощает решение.

Что же касается проверки, то она оказывается излишней только в тех случаях, когда исследована эквивалентность применявшихся в процессе решения преобразований.

Для этого необходимо выяснить, при каких преобразованиях получаем следствие данного уравнения, а в каких случаях над нами нависает угроза потери корней.

Посмотрим на примере, как исследуется равносильность двух уравнений. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если в уравнении произвести уничтожение двух подобных членов, то получится следствие данного уравнения.

Другими словами, если уравнение

$$f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = 0 \quad (4)$$

заменить уравнением

$$f(x) = 0, \quad (5)$$

то потеря корней не произойдет, а приобретение корней может произойти.

Сначала докажем, что не произойдет потери корней, т. е. что любой корень $x=c$ уравнения (4) является корнем уравнения (5).

Если $x=c$ — корень уравнения (4), то

$$f(c) + \varphi(c) - \varphi(c) = 0 \quad (4')$$

— истинное числовое равенство, которое не нарушится в результате уничтожения члена $\varphi(c)$.

Таким образом,

$$f(c) = 0 \quad (5')$$

— истинное числовое равенство, т. е. $x=c$ является также и корнем уравнения (5).

Остается убедиться в том, что уравнение (5) может иметь корни, посторонние для уравнения (4). Чтобы доказать это, достаточно привести пример. Уравнение

$$\cos x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = 0 \quad (4'')$$

после уничтожения подобных членов принимает вид

$$\cos x = 0. \quad (5'')$$

Корнями уравнения (5'') будут числа $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Но ни одно из них не удовлетворяет уравнению (4''), так как $\operatorname{tg} x$ перестает существовать, когда $\cos x = 0$.

Итак, теорема доказана.

Несколько уравнений могут образовывать систему или совокупность.

Говорят о *системе* уравнений, если требуется найти все решения, общие для всех уравнений, входящих в систему.

Если же нужно найти все такие решения, которые удовлетворяют хотя бы одному из нескольких уравнений, то говорят, что эти уравнения образуют *совокупность*.

Систему уравнений обычно записывают в столбик и ставят скобку фигурную скобку — знак системы; совокупность уравнений, как правило, записывается в строку.

Если мы рассмотрим совокупность двух уравнений:

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ и } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

то корни первого: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ — нужно объединить с корнями второго: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Получим решение совокупности

$$x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3.$$

Если же мы рассмотрим систему

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x^2 - 2x - 3 = 0, \end{cases}$$

то из корней первого уравнения нужно выбрать те, которые удовлетворяют и второму уравнению системы. Получим только одно решение системы: $x = -1$.

Уравнение

$$f(x) \varphi(x) = 0 \quad (6)$$

называется *распадающимся*.

Теорема 2. Уравнение (6) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ \varphi(x) \text{ существует;} \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(x)=0, \\ f(x) \text{ существует.} \end{cases} \quad (7)$$

Приведем доказательство. Если $x=a$ — корень уравнения (6), то $f(a)$ и $\varphi(a)$ существуют и либо $f(a)=0$, либо $\varphi(a)=0$. Следовательно, одна из систем (7) удовлетворяется при $x=a$.

Пусть теперь $x=a$ — корень совокупности (7). Если при $x=a$ удовлетворяется либо первая, либо вторая система, то и в том и в другом случае $f(a)\varphi(a)=0$, т. е. $x=a$ — корень уравнения (6).

У п р а ж н е н и я. Докажите следующие теоремы о равносильности уравнений.

17. Если к обеим частям уравнения

$$f(x)=\varphi(x)$$

прибавить выражение $\psi(x)$, то в случае, когда $\psi(x)$ имеет смысл при всяком x , получится равносильное уравнение, в противном случае могут быть потеряны корни.

18. Уравнения

$$f(x)+\psi(x)-\psi(x)=\varphi(x)$$

и

$$f(x)=\varphi(x)$$

в случае, когда $\psi(x)$ имеет смысл при всяком x , равносильны; в противном случае второе уравнение является следствием первого.

19. Если в уравнении

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \quad (8)$$

отбросить знаменатель, то получится уравнение

$$f(x)=\psi(x),$$

являющееся следствием данного уравнения.

19а. Уравнение (8) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=\psi(x), \\ \varphi(x) \text{ существует,} \\ \varphi(x) \neq 0. \end{cases}$$

20. Если обе части уравнения $f(x)=\varphi(x)$ возвести в квадрат, то полученное уравнение

$$[f(x)]^2=[\varphi(x)]^2 \quad (9)$$

является следствием данного уравнения. Уравнение (9) равносильно совокупности двух уравнений:

$$f(x)=\varphi(x); \quad f(x)=-\varphi(x).$$

21. Чему равносильна система

$$\begin{cases} f(x)g(x)=0, \\ \varphi(x)\psi(x)=0? \end{cases}$$

Найти действительные корни уравнений:

9.1. $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$.

9.2. $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$.

9.3. Решить уравнение $x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} = 7$.

Найти действительные корни уравнений:

9.4. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$.

9.5. $\sqrt[4]{629-x} + \sqrt[4]{77+x} = 8$.

9.6. $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)} - \sqrt[5]{(x-1)(x-33)} = 1$.

9.7. $\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b} + (x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2}$, a и b — действительные числа.

9.8. $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$, a — действительное число.

9.9. $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a$, a — действительное число.

9.10. Найти действительные решения уравнения

$$\left| x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right| = -x^2 - 4x + \beta$$

и определить, при каких значениях β оно имеет единственное¹⁾ действительное решение.

9.11. Решить систему

$$\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$$

9.12. Найти все действительные значения k , при которых решение системы

$$\begin{cases} x - 2y = k, \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

удовлетворяет условию: $x > \frac{1}{k}$, $y > 0$.

¹⁾ Два совпадающих решения считаются за одно.

9.13. Решить в области действительных чисел систему

$$\begin{cases} |x+y|=x-y+a, \\ |x-y|=x+y+b. \end{cases}$$

9.14. При каких значениях a система

$$\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет действительные решения? Найти эти решения.

Решить системы:

$$9.15. \begin{cases} x^2y+y+xy^2+x=18xy, \\ x^4y^2+y^2+x^2y^4+x^2=208x^2y^2. \end{cases}$$

$$9.16. \begin{cases} xy=x+y-z, \\ xz=2(x-y+z), \\ yz=3(y-x+z). \end{cases}$$

$$9.17. \begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2-z^2=20, \\ x^4+y^4-z^4=560. \end{cases} \quad 9.18. \begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+yz+zx=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$$

9.19. Исключить x и y из системы

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^2+y^2=b, \\ x^3+y^3=c. \end{cases}$$

Решить системы:

$$9.20. \begin{cases} 4\frac{y+z}{y^2z^2}=3x, \\ 4\frac{x+z}{x^2z^2}=3y, \\ \frac{x+y}{x^2y^2}=2z. \end{cases} \quad 9.21. \begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2, \\ xy=2(x+y). \end{cases}$$

$$9.22. \begin{cases} x+y=1, \\ xz+yt=2, \\ xz^2+yt^2=5, \\ xz^3+yt^3=14. \end{cases} \quad 9.23. \begin{cases} x-2y+3z=9, \\ x^2+4y^2+9z^2=189, \\ 3xz=4y^2. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение и всякое ее решение удовлетворяет уравнению $x + y = 0$ (a, x, y — действительные числа).

9.32. Найти все значения a , при которых система

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a, b, x, y — действительные числа).

9.33. Найти все значения a , при которых система

$$\begin{cases} 2|x| + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, x, y — действительные числа).

9.34. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + 2\sqrt{x^2 + 1} + y^2 = 3, \\ x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + y^2 = 0 \end{cases}$$

в области действительных чисел.

Г л а в а 10

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

О доказательстве неравенств. Доказать неравенство можно следующими способами, которые мы продемонстрируем на примере неравенства

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ где } a, b \geq 0.$$

1) От противного. Предположим противное:

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}.$$

Тогда

$$\frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} < 0, \text{ т. е. } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0,$$

что невозможно.

2) По определению неравенства. Составим разность левой и правой частей и определим ее знак:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

3) Вывести из ранее доказанного или очевидного неравенства. Мы знаем, что

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0, \text{ т. е. } a-2\sqrt{ab}+b \geq 0,$$

откуда

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Обратите внимание, что следующее «доказательство» неравенства является логически некорректным:

$$\text{если } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ то } \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \geq 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0,$$

что очевидно.

Некорректность приведенных рассуждений состоит в том, что в качестве исходного пункта взято доказываемое неравенство. Таким образом установлено, что если $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, то $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$.

Однако верное следствие может быть получено из ложной посылки. Если те же рассуждения провести в обратном порядке, то мы получим корректное доказательство, аналогичное тому, которое приведено выше под номером 3).

Решение неравенств. Система, совокупность. Решить неравенство—значит найти все системы значений входящих в него неизвестных, при которых неравенство истинно.

Если два или несколько неравенств должны удовлетворяться одновременно, то говорят, что они образуют *систему*.

Если достаточно, чтобы удовлетворялось одно из двух или нескольких неравенств, то говорят, что эти неравенства образуют *совокупность*.

Неравенства, образующие систему, записывают одно под другим, а сбоку ставят фигурную скобку—знак системы.

Например,

$$\begin{cases} x > 3, \\ x < 7. \end{cases}$$

Решение этой системы показано на рис. 10.1 двойной штриховкой. Эта же система неравенств может быть записана так: $3 < x < 7$.

Совокупность неравенств записывают в строку, что позволяет не путать ее с системой. Запись

$$x < 3, \quad x > 7$$

означает, что число x должно лежать на любом из заштрихованных на рис. 10.2 интервалов.



Рис. 10.1.



Рис. 10.2.

Решить систему, состоящую из нескольких совокупностей неравенств, — значит найти все значения неизвестного, удовлетворяющие всем входящим в систему совокупностям.

Пример 1. Решить систему совокупностей неравенств

$$\begin{cases} x < -2, & 1 \leq x \leq 2, \\ x < -3, & 1,5 < x \leq 3, \\ -2,5 < x \leq 2; & x \geq 2,7. \end{cases}$$

Решение первой совокупности изображено на рис. 10.3 с помощью двух прямоугольников (четвертая сторона одного из них

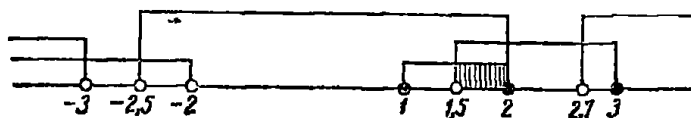


Рис. 10.3.

бесконечно отодвинута влево), расположенных над точками, удовлетворяющими этой совокупности. Аналогично изображены решения второй и третьей совокупностей.

Чтобы избежать путаницы, мы для разных совокупностей строим прямоугольники различной высоты. Особо внимательно нужно следить за концами интервалов: если неравенство строгое, то будем рисовать в конце интервала светлый кружок, а если нестрогое, то черный кружок.

Точки числовой оси, над которыми расположены три прямоугольника разной высоты (рис. 10.3), дают решение системы $1,5 < x \leq 2$.

Упражнения ¹⁾ 1. Что произойдет с совокупностью неравенств, если к ней добавить неравенство, не имеющее решений?

2. Что произойдет с системой неравенств, если к ней добавить неравенство, не имеющее решений?

¹⁾ Ответы к упражнениям см. на стр. 326.

3. Решите систему двух совокупностей неравенств

$$\begin{cases} -3 < x \leq 1, & 3 \leq x \leq 7, & x > 8; \\ -1 < x \leq 2, & x > 5. \end{cases}$$

Метод интервалов. Рассмотрим неравенства типа

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0. \quad (1)$$

Начнем предварительно с неравенства $(x-2)(x-3) > 0$. Его нередко решают следующим образом. Произведение двух множителей положительно тогда и только тогда, когда оба множителя одного знака, т. е. данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x-2 < 0, \\ x-3 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 > 0, \\ x-3 > 0. \end{cases}$$

Чтобы убедиться в нерациональности такого способа решения, достаточно применить его к решению неравенства, левая часть которого содержит, например, десять множителей

$$(x-1)(x-2) \dots (x-10) > 0. \quad (2)$$

Несложный подсчет показывает, что в этом случае пришлось бы рассматривать совокупность, состоящую из 512 систем по 10 неравенств в каждой системе.

Решим неравенство (2) с помощью более рационального приема, называемого методом интервалов. Отметим на числовой оси все корни многочлена, стоящего в левой части неравенства (рис. 10.4). Когда x

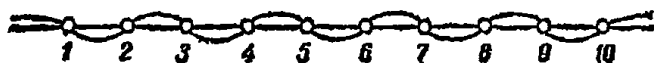


Рис. 10.4.

расположен правее самого большого корня ($x > 10$), многочлен будет положительным, так как каждый множитель положителен. Если двигаться по оси в отрицательном направлении, то при переходе через точку $x=10$ множитель $x-10$ поменяет знак. В произведении появится один отрицательный множитель, а девять останутся положительными, в результате чего многочлен станет отрицательным. При переходе через каждый следующий корень многочлен будет менять знак, так как будет появляться дополнительный отрицательный множитель. (Области, где многочлен положителен, отмечены на рис. 10.4 дугой сверху, а области, где он отрицателен, — дугой снизу.) Теперь легко записать решение неравенства (2):

$$x < 1, \quad 2 < x < 3, \quad 4 < x < 5, \quad 6 < x < 7, \quad 8 < x < 9, \quad x > 10.$$

Приемы, позволяющие решать более сложные неравенства типа (1) станут понятны, если вы разберете примеры 2 и 3 и следующие за ними упражнения.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x+3)(2x+2)(x-4)^2(5-x) > 0.$$

Перепишем неравенство в виде

$$(x+3)(x+1)(x-4)^2(x-5) < 0,$$

где в каждой скобке стоит двучлен с коэффициентом 1 при x . Множитель $(x-4)^2$ всегда неотрицателен и только в точке $x=4$ обращается в нуль. Поэтому его влияние на решение неравенства

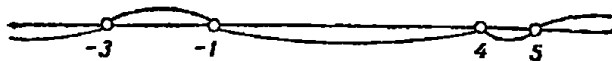


Рис. 10.5.

ограничивается тем, что он исключает точку $x=4$ (рис. 10.5). Остается проследить чередование знаков в неравенстве

$$(x+3)(x+1)(x-5) < 0.$$

Ответ. $x < -3$, $-1 < x < 4$, $4 < x < 5$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{(x+3)^2(x+1)(x-5)}{(x-4)^2(x-2)} \leq 0. \quad (3)$$

Данное неравенство не удовлетворяется в тех точках, где множители, стоящие в знаменателе, обращаются в нуль ($x=4$, $x=2$). Поэтому исключим эти точки из дальнейшего рассмотрения, обозначив их на рис. 10.6 светлыми кружками.

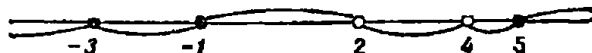


Рис. 10.6.

В точках же, в которых обращается в нуль числитель ($x=-3$, $x=-1$, $x=5$), неравенство превращается в равенство, т. е. эти точки должны войти в решение неравенства (3). Отметим их на рисунке черными кружками¹⁾.

Множители $(x+3)^2$ и $(x-4)^2$, не меняющие знака на всей числовой оси, можно опустить, так как их влияние уже учтено. Во всех остальных точках неравенство (3) равносильно такому:

$$(x+1)(x-5)(x-2) < 0.$$

Ответ. $x \leq -1$, $2 < x < 4$, $4 < x \leq 5$.

¹⁾ Если какая-то точка уже была отмечена светлым кружком, то изменять обозначение не следует.

У п р а ж н е н и я. Решите неравенства:

4. $(5-2x)(3-x)^3(x-4)^2 \leq 0.$

5. $\frac{(x+3)^2(x+1)(x-5)}{(x-4)^2(x-2)^3} < 0.$

Иррациональные неравенства. Решая уравнения, мы можем получать следствия данного уравнения и закончить решение проверкой, которая отсеивает посторонние корни. При решении же неравенств обычно получаются целые интервалы решений, что сильно усложняет проверку. Поэтому неравенства преобразовывают так, чтобы не нарушалась равносильность.

Начнем с иррациональных неравенств.

П р и м е р 4. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14. \quad (4)$$

Нередко предлагают такое «решение»:

$$\begin{aligned} x^2 - 55x + 250 &< (x - 14)^2, \\ -55x + 250 &< -28x + 196, \\ x &> 2, \end{aligned}$$

которое обосновывают следующим образом: «Левая часть меньше правой, но неотрицательна, так как мы имеем дело с арифметическим корнем. Следовательно, обе части данного неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат, не нарушая равносильности неравенства».

Чтобы убедиться, что неравенство решено неверно, подставим в данное неравенство, например, $x=10$.

Проанализируем ход приведенных здесь рассуждений. Они доказывают, что если неравенство (4) удовлетворяется при некоторых x , то обе части его можно возвести в квадрат, и тогда $x > 2$. Однако отсюда не следует обратное, что исходное неравенство удовлетворяется при всех $x > 2$.

Присутствие в неравенстве (4) квадратного корня накладывало на неизвестное определенные ограничения, которые оказались разрушенными после возведения (4) в квадрат.

Трехчлен $x^2 - 55x + 250$ вначале стоял под знаком квадратного корня, а потому должен был быть неотрицательным. После возведения неравенства (4) в квадрат это ограничение исчезло; теперь ничто не мешает трехчлену стать отрицательным. Даже наоборот, в этом случае неравенство $x^2 - 55x + 250 < (x - 14)^2$ удовлетворяется наверняка, так как справа стоит величина, которая не может стать меньше нуля.

Чтобы подкоренное выражение оставалось неотрицательным, мы должны добавить к полученному после возведения в квадрат неравенству требование $x^2 - 55x + 250 \geq 0$, т. е. $x \leq 5$, $x \geq 50$. Из полупрямой $x > 2$ оказались выделенными две ее части: $2 < x \leq 5$, $x \geq 50$.

Но и теперь еще не все. Достаточно подставить в исходное неравенство значение $x=4$ и мы убедимся, что оно не удовлетворяется. Дело в том, что при возведении в квадрат мы устранили еще одно ограничение, которое присутствовало в неравенстве (4). В левой

части первоначального неравенства стоит квадратный корень, т. е. неотрицательное число. Чтобы это неравенство удовлетворялось, правая его часть $x-14$ должна быть больше нуля. Итак, надо добавить ограничение $x-14 > 0$, которое присутствовало в исходном неравенстве и оказалось разрушенным после возведения в квадрат.

Таким образом, после возведения данного неравенства в квадрат, мы должны позаботиться о сохранении всех ограничений, которые присутствуют в данном неравенстве. Неравенство (4) нужно было заменить системой

$$\begin{cases} x^2 - 55x + 250 < (x-14)^2, \\ x^2 - 55x + 250 \geq 0, \\ x-14 > 0, \end{cases}$$

решая которую мы нашли бы, что

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \leq 5, \quad x \geq 50, \quad \text{т. е. } x \geq 50, \\ x > 14. \end{cases}$$

У п р а ж н е н и я. В каждом из неравенств 6—9 освободиться от иррациональности, не нарушая равносильности:

6. $\sqrt{ax^2+bx+c} < 3.$

7. $\sqrt{ax^2+bx+c} \geq 3.$

8. $\sqrt{ax^2+bx+c} \leq dx+e.$

9. $\sqrt{ax^2+bx+c} > dx+e.$

Показательные и логарифмические неравенства. При решении показательных и логарифмических неравенств пользуются следующими свойствами:

1. Неравенство $f(x)^{\varphi(x)} > 1$, где $f(x) > 0$, равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases}$$

1а. Неравенство $f(x)^{\varphi(x)} < 1$, где $f(x) > 0$, равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

2. Неравенство $\log_{f(x)} \varphi(x) > 0$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases}$$

2а. Неравенство $\log_{f(x)} \varphi(x) < 0$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < \varphi(x) < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) > 1. \end{cases}$$

Запомнить эти свойства можно следующим образом: степень больше единицы, если основание и показатель степени одинаково расположены по отношению к единице и нулю соответственно (т. е. основание правее единицы и показатель правее нуля или основание левее единицы и показатель левее нуля); логарифм больше нуля, если основание и логарифмируемое выражение одинаково расположены по отношению к единице. Если расположение элементов, о которых шла речь, неодинаково, то степень меньше единицы, а логарифм меньше нуля.

10.1. Доказать, что если $a + b = 2$, где a и b — действительные числа, то $a^4 + b^4 \geq 2$.

10.2. Доказать, что если $x^2 + y^2 = 1$, то

$$-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}.$$

10.3. Дано $a + b = c$, где a, b, c — положительные числа. Доказать, что

$$a^{2/3} + b^{2/3} > c^{2/3}.$$

10.4. Доказать, что $-x^3 + x^2 \leq \frac{1}{4}$, если $0 \leq x \leq 1$.

10.5. Доказать неравенство

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$$

при условии, что $a + b + c = 1$, а подкоренные выражения неотрицательны.

10.6. Доказать неравенство

$$(a + b)^n < 2^n (a^n + b^n),$$

если $a > 0$, $b > 0$, n — натуральное число.

10.7. Доказать, что

$$(a^m + b^m)^{1/m} \leq (a^n + b^n)^{1/n},$$

где $a \geq 0$, $b \geq 0$, $m \geq n$, m и n — натуральные числа.

10.8. Доказать, что $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ при $n > 1$.

10.9. Доказать неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > 3,$$

где a, b и c — положительные и не равные друг другу числа, не пользуясь неравенствами между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел.

10.10. Доказать, что при любых действительных x и y имеет место неравенство

$$(a \cdot 2^x + b \cdot 3^y + 1)^2 \leq (4^x + 9^y + 1)(a^2 + b^2 + 1).$$

10.11. Доказать, что

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 \geq 1$$

при всех действительных значениях x .

10.12. Доказать, что если действительные числа x, y, z , не равные нулю, удовлетворяют равенствам: $x + y + z = xyz$ и $x^2 = yz$, то $x^2 \geq 3$.

10.13. Доказать, что если x, y, z — действительные числа, удовлетворяющие равенствам

$$x + y + z = 5, \quad yz + zx + xy = 8,$$

то

$$1 \leq x \leq \frac{7}{3}, \quad 1 \leq y \leq \frac{7}{3}, \quad 1 \leq z \leq \frac{7}{3}.$$

10.14. Решить неравенство

$$ax^2 + x + 1 > 0,$$

где $a \neq 0$ — произвольное действительное число.

10.15. Найти все действительные значения m , при которых квадратный трехчлен $x^2 + mx + (m^2 + 6m)$ будет отрицателен при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству $1 < x < 2$.

10.16. Найти все действительные значения a , при которых корни многочлена

$$x^2 + x + a$$

будут действительными и оба корня будут больше a .

10.17. При каких значениях k корни многочлена

$$k^2x^2 + kx - 2$$

будут действительными и один корень по абсолютной величине будет больше 1, а другой по абсолютной величине будет меньше 1?

10.18. Найти все m , для которых неравенство

$$mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$$

удовлетворяется при всех положительных значениях x .

Решить неравенства:

$$10.19. |x^2 - 2x - 3| < 3x - 3. \quad 10.20. |x - 3| > |x + 2|.$$

$$10.21. \frac{1 - \sqrt{8x - 3}}{4x} \geq 1. \quad 10.22. \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 3.$$

$$10.23. \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}.$$

$$10.24. \frac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \sqrt{1+2x} - 1.$$

$$10.25. \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} < 35 - 2x.$$

$$10.26. 2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0.$$

$$10.27. 4x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{\sqrt{x}+1}.$$

$$10.28. 4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6.$$

10.29. Найти положительные решения неравенства

$$x^{\frac{2x-1}{3-x}} < 1.$$

Решить неравенства:

$$10.30. \left(\frac{1}{2}\right)^{(x^2-2x^2+1)^{1/2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}.$$

$$10.31. x^{\log_a x+1} > a^2 x.$$

$$10.32. x^{\lg^2 x - 3 \lg x + 1} > 1000. \quad 10.33. \sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1.$$

$$10.34. \lg \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 0. \quad 10.35. \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1.$$

$$10.36. \log_2 (2^x - 1) \log_{1/2} (2^{x+1} - 2) > -2.$$

$$10.37. \log_{0,1} (x^2 + 1) < \log_{0,1} (2x - 5).$$

$$10.38. \frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1.$$

$$10.39. \log_{kx} x + \log_x (kx^2) > 0, \quad \text{где } 0 < k < 1.$$

$$10.40. \log_x [\log_2 (4^x - 6)] \leq 1.$$

$$10.41. \log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geq 0.$$

$$10.42. \log_{x^2} \frac{4x-5}{|x-2|} \geq \frac{1}{2}. \quad 10.43. \log_x' 2x \leq \sqrt{\log_x (2x^3)}.$$

$$10.44. \log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1} < \log_{1/2} \log_{1/3} \frac{x-1}{x+1}.$$

$$10.45. \log_{x^2-1} (3x-1) < \log_{x^2-1} x^2.$$

$$10.46. \log_2^4 x - \log_{1/2}^2 \frac{x^5}{4} - 20 \log_2 x + 148 < 0.$$

10.47. При каких значениях y верно следующее утверждение: «существует хотя бы одно значение x , при котором выполняется неравенство

$$2 \log_{0.5} y^2 - 3 + 2x \log_{0.5} y^2 - x^2 > 0?»$$

Г л а в а 11

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

По определению $\log_a N$ есть число, удовлетворяющее равенству

$$a^{\log_a N} = N,$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Формулы

$$\left. \begin{aligned} \log_a x + \log_a y &= \log_a xy; \\ \log_a x - \log_a y &= \log_a \frac{x}{y}; \\ n \log_a x &= \log_a x^n \quad (n — \text{действительное число}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

называются *формулами потенцирования*. Первые две являются неабсолютными тождествами (см. введение к главе 9); при четных n и третья формула оказывается неабсолютным тождеством. Применение этих формул при решении уравнений (под применением формулы мы понимаем замену в уравнении выражения, стоящего в ее левой части, на выражение, стоящее справа) может привести только к приобретению посторонних решений.

Формулы (1), прочитанные справа налево, называются *формулами логарифмирования*. Чтобы формулы логарифмирования не приводили к потере решений, ими пользуются в виде

$$\begin{aligned} \log_a xy &= \log_a |x| + \log_a |y|; \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a |x| - \log_a |y|; \\ \log_a x^{2k} &= 2k \log_a |x| \quad (k — \text{целое, } k \neq 0). \end{aligned}$$

Следующие формулы позволяют переходить от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием:

$$\begin{aligned} \log_a N &= \frac{\log_b N}{\log_b a}; & \log_a b &= \frac{1}{\log_b a}; \\ \log_{a^n} N &= \frac{1}{n} \log_a N; & \log_a N &= \log_{a^n} N^n \quad (n \neq 0); \\ \log_a N \log_b M &= \log_b N \log_a M. \end{aligned}$$

Если в третьей из этих формул $n=2k$, то в правой части нужно писать вместо основания a основание $|a|$.

Формула

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = \frac{1}{\log_{f(x)} \varphi(x)} \quad (2)$$

является неабсолютным тождеством, так как ее правая часть перестает существовать при $f(x)=1$, в то время как левая часть при соответствующих значениях x может существовать и обращаться в нуль.

Таким образом, применение формулы (2) может привести к потере решений, при которых $f(x)=1$.

При решении уравнений вида

$$\varphi(x)^{f(x)} = \varphi(x)^{g(x)} \quad (3)$$

нужно воспользоваться условием равенства оснований.

Если $\varphi(x) \neq -1, 0, +1$, то следствием уравнения (3) является уравнение

$$f(x) = g(x).$$

Случаи, когда $\varphi(x)$ равно $-1, 0$ или 1 , нужно рассмотреть отдельно.

Решая уравнение (3), следует иметь в виду, что выражения вида $\frac{0}{0}$ и 0^0 не имеют смысла.

11.1. Найти $\log_5 6$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

11.2. Найти $\lg 122,5$, если $\lg 5 = a$, $\lg 7 = b$.

11.3. Решить уравнение

$$9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}.$$

11.4. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$9 - |x-2| - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0.$$

11.5. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0.$$

Решить уравнения:

11.6. $5^{x+\frac{1}{\sqrt{8^x}}} = 100.$

11.7. $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10(2 - \sqrt{3})}.$

11.8. $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 2^x.$

11.9. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2.$

$$11.10. \log_3 (3^x - 1) \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6.$$

$$11.11. -\log_{\frac{1}{7}} x + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{7}} = \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{x} + \log_x^2 7 - \frac{7}{4}.$$

$$11.12. 3^{\log_{27} x} x^{\log_3 x} = 9.$$

$$11.13. \sqrt{1 + \log_x \sqrt{27} \log_3 x} + 1 = 0.$$

$$11.14. 1 + 2 \log_x 2 \cdot \log_4 (10 - x) = \frac{2}{\log_4 x}.$$

$$11.15. \log_{0.5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0.$$

$$11.16. \frac{1}{\log_6 (3+x)} + \frac{2 \log_{0.25} (4-x)}{\log_2 (3+x)} = 1.$$

$$11.17. \frac{\lg |x^4 + 2x^3 + 2x - 1|}{\lg |x^2 + x - 1|} = 2.$$

$$11.18. a^{\log \sqrt{b}^{-x}} - 5x^{\log_b a} + 6 = 0.$$

$$11.19. \sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$.

11.20. Найти неотрицательные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^y = y^x, \\ 15^y = 3^x. \end{cases}$$

Решить системы уравнений:

$$11.21. \begin{cases} x^y = 243, \\ \sqrt[5]{1024} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2. \end{cases} \quad 11.22. \begin{cases} x^{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = y^{\frac{8}{3}}, \\ y^{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = x^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

$$11.23. \begin{cases} 11^{xz} - 2 \cdot 5^y = 71, \\ 11^z + 2 \cdot 5^{\frac{y}{2}} = 21, \\ 11^{(x-1)z} + 5^{\frac{y}{2}} = 16. \end{cases}$$

$$11.24. \begin{cases} x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 2^{2x+y} = 2, \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1. \end{cases}$$

- 11.25. $\begin{cases} \log_2(y-x) - \log_8(3y-5x) = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$
- 11.26. $\begin{cases} 20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81 \sqrt[3]{3}, \\ xy = 9 \sqrt[3]{9}. \end{cases}$
- 11.27. $\begin{cases} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3, \\ xy = 3. \end{cases}$
- 11.28. $\begin{cases} \log_2 \frac{x^2 \sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_8 x \cdot \log_2(y+1)^2 = \frac{4}{3}. \end{cases}$
- 11.29. $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} x = 1, \\ b^{\log \sqrt{b}} \sqrt{b} + x^2 = 2a. \end{cases}$
- 11.30. $\begin{cases} 7 \cdot 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{y+z-x+1} = 9, \\ 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{y+z-x} = 27, \\ \lg(x+y+z) - 3\lg x = \lg yz + \lg 2. \end{cases}$

Глава 12

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Сводка основных тригонометрических формул.

1. Зависимости между тригонометрическими функциями:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

2. Тригонометрические функции суммы и разности аргументов:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}.$$

3. Функции двойного и тройного аргумента:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x},$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

4. Формулы понижения степени для синуса и косинуса:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

5. Функции половинного аргумента:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$$

6. Преобразование суммы функций в произведение:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}, \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y},$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}, \quad \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y}.$$

7. Преобразование произведения функций в сумму:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)],$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)].$$

Все формулы нужно уметь читать не только «слева направо», но и «справа налево». Так, например, в записи $\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x$ нужно узнавать $\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$, а не принимать ошибочно за $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, а в записи $\frac{1 + \cos x}{\sin x}$ узнавать $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

Проверьте себя и напишите, чему равно выражение $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.

Если вы убеждены в том, что это выражение равно тангенсу половинного угла, обратите внимание на то обстоятельство, что выражение, о котором идет речь, неотрицательно, а тангенс половинного угла — знакопеременная функция. Таким образом,

$$\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|,$$

и не следует писать в этом случае $\pm \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. То же самое рассужде-

ние можно провести для любой из приведенных выше формул, где перед корнем стоит $\pm$. Мы ставим $\pm$, чтобы «примирить» выражение, стоящее в левой части, которое может быть отрицательным, с неотрицательным корнем. Поставив $\pm$, мы не получаем двужначную функцию; этот символ говорит лишь о том, что для каждого фиксированного x мы обязаны выбрать определенный знак, в зависимости от того, в какой четверти тригонометрического круга оказывается угол, стоящий под знаком функции в левой части формулы.

12.1. Упростить выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3 \sin x} [(2 \cos x - \sin x) \operatorname{ctg} x + 2 \sin x + \cos x] \times \\ & \times \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3} \sin x}{2 \cos x - \sin x} \right)^{-2} \right]^{-1} - \\ & - \frac{1}{6} \frac{\cos 2x [2(1 - \sin x \cos x) + (\sin x + \cos x)^2]}{(\sin x + \cos x)^2 (1 - \sin x \cos x)}. \end{aligned}$$

12.2. Доказать тождество

$$\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} (30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha) \operatorname{tg} (30^\circ - \alpha) = 1.$$

12.3. Доказать тождество

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x.$$

12.4. Доказать, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{tg} \alpha$, если

$$\sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta \text{ и } \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1).$$

12.5. Вычислить без таблиц

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}.$$

12.6. Вычислить без таблиц

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}.$$

12.7. Доказать, что если $\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} = \frac{a}{b}$ и $\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} = \frac{A}{B}$, то $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$.

12.8. Доказать, что если $|\sin x| = |k \sin y|$, где $-1 \leq k \leq 1$, то произведение $\sin(x+y) \sin(x-y)$ неположительно.

12.9. Доказать, что если $\sin \alpha + \sin \beta = a$, $\cos \alpha + \cos \beta = b$, то $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{4a}{a^2 + b^2 + 2b}$.

12.10. Дано

$$2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha = 1.$$

Вычислить $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$.

12.11. Углы α , β , γ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{3}$. Вычислить

$$A = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma.$$

12.12. Сумма трех положительных чисел α , β и γ равна $\frac{\pi}{2}$. Вычислить произведение $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma$, если известно, что $\operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \beta$ и $\operatorname{ctg} \gamma$ образуют арифметическую прогрессию.

Глава 13

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Простейшие тригонометрические уравнения.

$$\sin x = a, \quad x = n\pi + (-1)^n \arcsin a, \quad |a| \leq 1,$$

$$\cos x = a, \quad x = 2n\pi \pm \arccos a, \quad |a| \leq 1,$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = n\pi + \operatorname{arctg} a,$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad x = n\pi + \operatorname{arcctg} a.$$

Решения уравнения $\sin x = a$ часто удобно записывать в виде двух серий корней:

$$x = 2n\pi + \arcsin a, \quad x = \pi(2n+1) - \arcsin a.$$

Хотя приведенные формулы верны при всех значениях a , удовлетворяющих указанным справа ограничениям, при некоторых a эти формулы дают неудобный ответ.

Так, например, если к уравнению $\sin x = 1$ применить общую формулу, то получим

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}.$$

При $n = 2k$ получим $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, а при $n = 2k+1$ $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. При четном и нечетном n мы пришли к одинаковому ответу. Но этот же ответ можно получить гораздо проще, если не пользоваться общей формулой. Достаточно заметить, что $\sin x = 1$ тогда и только тогда, когда подвижный радиус вертикален и направлен вверх.

Поэтому целесообразно помнить решения уравнений:

$$\sin x = 0, \quad x = n\pi; \quad \sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi;$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi;$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad \cos x = 1, \quad x = 2n\pi;$$

$$\cos x = -1, \quad x = (2n+1)\pi;$$

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = n\pi; \quad \operatorname{ctg} x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

Однородные уравнения. Уравнение вида

$$a_0 \sin^k x + a_1 \sin^{k-1} x \cos x + \dots + a_{k-1} \sin x \cos^{k-1} x + a_k \cos^k x = 0 \quad (1)$$

называется *однородным*, так как все слагаемые его левой части имеют одинаковую степень относительно $\sin x$ и $\cos x$.

При $a_0 \neq 0$ среди решений уравнения (1) не содержится значений x , при которых $\cos x = 0$. В самом деле, полагая $\cos x = 0$, мы получаем из уравнения (1): $a_0 \sin^k x = 0$, откуда $\sin^k x = 0$, так как $a_0 \neq 0$ по условию. Но это невозможно, поскольку нет таких значений x , при которых $\sin x$ и $\cos x$ одновременно обращаются в нуль.

Аналогично при $a_k \neq 0$ среди решений уравнения (1) не содержится значений x , при которых $\sin x = 0$.

Наметим пути решения уравнения (1). Рассмотрим два случая.

1) $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$. В этом случае, разделив уравнение (1) на $\cos^k x$, мы получим (поскольку $\cos x \neq 0$) равносильное ему

алгебраическое уравнение

$$a_0 y^k + a_1 y^{k-1} + \dots + a_{k-1} y + a_k = 0 \quad (2)$$

относительно $y = \operatorname{tg} x$.

Можно также делить уравнение (1) на $\sin^k x$. Тогда (поскольку $\sin x \neq 0$) мы получим равносильное уравнению (1) алгебраическое уравнение

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k = 0 \quad (3)$$

относительно $z = \operatorname{ctg} x$.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin^3 x - 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + 2 \cos^3 x = 0. \quad (4)$$

Разделив его на $\cos^3 x$, получим алгебраическое уравнение

$$y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0,$$

где $y = \operatorname{tg} x$. Последнее уравнение легко решается путем разложения его левой части на множители, и мы находим корни:

$$y_1 = -1, y_2 = 1, y_3 = 2.$$

Теперь остается решить совокупность уравнений

$$\operatorname{tg} x = -1, \operatorname{tg} x = 1, \operatorname{tg} x = 2.$$

Мы получим следующие корни уравнения (1):

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad x = n\pi + \operatorname{arctg} 2.$$

2) $a_0 = 0$, или $a_k = 0$, или $a_0 = a_k = 0$. Пусть, например, $a_0 = a_k = 0$, а $a_1 \neq 0$ и $a_{k-1} \neq 0$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$a_1 \sin^{k-1} x \cos x + a_2 \sin^{k-2} x \cos^2 x + \dots + a_{k-2} \sin^2 x \cos^{k-2} x + a_{k-1} \sin x \cos^{k-1} x = 0. \quad (5)$$

В левой части уравнения выносим за скобки все, что возможно (в случае уравнения (5) мы можем вынести за скобки произведение $\sin x \cos x$). В результате получим уравнение

$$\sin x \cos x (a_1 \sin^{k-1} x + a_2 \sin^{k-2} x \cos x + \dots + a_{k-2} \sin x \cos^{k-2} x + a_{k-1} \cos^{k-1} x) = 0,$$

распадающееся на совокупность уравнений

$$\sin x = 0, \cos x = 0,$$

$$a_1 \sin^{k-1} x + a_2 \sin^{k-2} x \cos x + \dots$$

$$+ a_{k-2} \sin x \cos^{k-2} x + a_{k-1} \cos^{k-1} x = 0,$$

из которых первые два решаются просто (см. стр. 62), а пути решения третьего уравнения показаны в случае 1).

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin^4 x \cos x - 2 \sin^3 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^3 x + 2 \sin x \cos^4 x = 0.$$

Левую часть уравнения разлагаем на множители:

$$\sin x \cos x (\sin^3 x - 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + 2 \cos^3 x) = 0.$$

Получаем совокупность уравнений

$$\sin x = 0, \cos x = 0, \sin^3 x - 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + 2 \cos^3 x = 0.$$

Решения первых двух уравнений даны на стр. 62. Третье уравнение подробно рассмотрено в примере 1.

Системы тригонометрических уравнений. Предположим, что, преобразовывая систему тригонометрических уравнений, мы пришли к системе

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 1. \end{cases}$$

Если переписать эту систему в виде

$$\begin{cases} x+y = n\pi, \\ x-y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \end{cases}$$

то, складывая и вычитая полученные уравнения, придем к выводу, что

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{3n\pi}{2}, \\ y = -\frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}. \end{cases}$$

Решили ли мы систему? Оказывается, нет. Решить систему — значит найти все ее решения, а из поля нашего зрения выпало такое очевидное решение, как $x = \frac{3\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$ (ни при каком целом n из выражения $\frac{\pi}{4} + \frac{3n\pi}{2}$ нельзя получить $\frac{3\pi}{4}$).

В чем же ошибка? Ошибка очень проста: переходя от первоначальной системы к выражениям относительно $x+y$ и $x-y$, мы должны были сохранить их «независимость», которая присутствовала в исходной системе. Вместо этого мы «связали» их введенным общим целочисленным переменным n .

Правильным было бы такое решение:

$$\begin{cases} x+y = n\pi, \\ x-y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2m+n), \\ y &= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}(2m-n). \end{aligned}$$

Прежде чем приступать к решению задач, ознакомьтесь с введенным к главе 9.

Решить уравнения:

$$13.1. 1 + \sin 2x + 2\sqrt{2} \cos 3x \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \\ = 2 \sin x + 2 \cos 3x + \cos 2x.$$

$$13.2. \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}. \quad 13.3. \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}.$$

$$13.4. \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 7x = 1. \quad 13.5. \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{ctg} x} = 2 \sin x.$$

$$13.6. 2 \operatorname{tg} 3x - 3 \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x.$$

$$13.7. \sin^3 x + \cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin 3x.$$

$$13.8. 4 \operatorname{tg} 4x - 4 \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x.$$

13.9. Найти решения уравнения

$$\frac{\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4 \sin x,$$

лежащие в интервале $(0, 2\pi)$.

13.10. Решить уравнение

$$\sin(x - \alpha) = \sin x - \sin \alpha.$$

13.11. Найти решения уравнения

$$|\cos 2x| = |\sin^2 x - a|$$

(a — действительное число), удовлетворяющие неравенству

$$0 \leq x \leq 2\pi.$$

Решить уравнения:

$$13.12. \sqrt{17 \sec^2 x + 16 \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} x \sec x - 1\right)} = \\ = 2 \operatorname{tg} x (1 + 4 \sin x).$$

$$13.13. (\operatorname{tg} x + \sin x)^{1/2} + (\operatorname{tg} x - \sin x)^{1/2} = 2 \operatorname{tg}^{1/2} x \cos x.$$

$$13.14. \operatorname{ctg} 2x + 3 \operatorname{tg} 3x = 2 \operatorname{tg} x + \frac{2}{\sin 4x}.$$

$$13.15. \sec x^2 + \operatorname{cosec} x^2 + \sec x^2 \operatorname{cosec} x^2 = 1.$$

$$13.16. 6 \sin x - 2 \cos^3 x = \frac{5 \sin 4x \cos x}{2 \cos 2x}.$$

$$13.17. 4 \sin x + 2 \cos x = 2 + 3 \operatorname{tg} x. \quad 13.18. \cos x = \cos^2 \frac{3}{4} x.$$

$$13.19. \sin 4x \left[2 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] = \\ = 2\sqrt{2} (1 + \sin 2x + \cos 2x).$$

$$13.20. \sin 4x \sin x - \sin 3x \sin 2x = \frac{1}{2} \cos 3x + (1 + \cos x)^{1/2}.$$

$$13.21. \sin 4x = m \operatorname{tg} x, \text{ где } m > 0.$$

$$13.22. \sin \frac{x}{2} (\sin x + \sin 2x + \dots + \sin 100x) = \frac{1}{2} \sin \frac{101x}{2}.$$

$$13.23. \sin^3 x + \sin 2x \sin 4x + \dots + \sin nx \sin n^3 x = 1.$$

$$13.24. 4 \cos x - 2 \cos 2x - \cos 4x = 1.$$

$$13.25. \cos(\pi \sqrt{x}) \cos(\pi \sqrt{x-4}) = 1.$$

$$13.26. \sin^3 x + \cos^3 x = 1.$$

$$13.27. \cos^2 3x + \frac{1}{4} \cos^2 x = \cos 3x \cos^4 x.$$

13.28. При каких значениях a уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение?

Решить системы:

$$13.29. \begin{cases} \sin x + \sec y = 2, \\ \sin x \sec y = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad 13.30. \begin{cases} \cos(x-y) = 2 \cos(x+y), \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$$13.31. \begin{cases} \cos^2 y + 3 \sin x \sin y = 0, \\ 21 \cos 2x - \cos 2y = 10. \end{cases}$$

$$13.32. \begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 2y, \\ 2 \sin x \cos(x-y) = \sin y. \end{cases}$$

$$13.33. \begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{5} \cos y. \end{cases}$$

$$13.34. \begin{cases} \sin \frac{\pi x^2}{2} = 1, \\ |x| + |y| = 3. \end{cases} \quad 13.35. \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = 3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

$$13.36. \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = a, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 2. \end{cases} \quad 13.37. \begin{cases} \sin x + \sin y = \sin \alpha, \\ \cos x + \cos y = \cos \alpha. \end{cases}$$

$$13.38. \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = a, \\ x + y = 2 \arcsin\left(a + \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

13.39. Найти все пары чисел x, y , которые удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 8 + \sin^2(x+y).$$

13.40. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$$

13.41. Решить уравнение

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}.$$

13.42. Найти все пары чисел a и b , при которых для любых x и y , удовлетворяющих условию $x+y=a$ (где $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), верно равенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b$.

13.43. Найти все пары чисел x и y , которые удовлетворяют уравнению

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin y.$$

13.44. Решить уравнение

$$\sin x + 2 \sin 2x = 3 + \sin 3x.$$

Г л а в а 14

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решить неравенства:

14.1. $|\sin x| > |\cos x|$. 14.2. $1 - \sin x + \cos x < 0$.

14.3. $\sin x - 3 \cos x < 0$. 14.4. $2 \cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$,

14.5. $\cos x \operatorname{tg} 2x \leq 0$. 14.6. $5 + 2 \cos 2x \leq 3 |2 \sin x - 1|$.

14.7. Найти решения неравенства

$$\sin 2x > \sqrt{2} \sin^2 x + (2 - \sqrt{2}) \cos^2 x,$$

лежащие в интервале $(0, 2\pi)$.

14.8. При каких значениях α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, уравнение

$$2x^2 - 2(2 \cos \alpha - 1)x + 2 \cos^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 2 = 0$$

имеет различные действительные корни? Исследовать знаки корней.

Решить неравенства:

$$14.9. \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1. \quad 14.10. \operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} \geq 1.$$

$$14.11. \left(\frac{3(\sin x + \cos x) - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sin x - \cos x} \right)^{1/2} > 1.$$

$$14.12. \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x < -1.$$

$$14.13. \sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{\cos x} > \sqrt{\frac{17}{7} - \cos x}, \quad \text{если } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

14.14. Найти все значения x из интервала $0 < x < \pi$, удовлетворяющие неравенству

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin x + 2\cos x}.$$

14.15. Доказать, что при любом α имеет место неравенство

$$4 \sin 3\alpha + 5 \geq 4 \cos 2\alpha + 5 \sin \alpha.$$

Г л а в а 15

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решить неравенства:

$$15.1. (\log_{\sin x} 2)^2 < \log_{\sin x} (4 \sin^3 x).$$

$$15.2. (\log_{\operatorname{tg} x} 3)^2 \leq \log_{\operatorname{tg} x} (3 \operatorname{tg}^2 x).$$

15.3. Найти решения неравенства

$$\log_2 \cos x > \log_2 \operatorname{tg} x,$$

удовлетворяющие условию $0 \leq x \leq \pi$.

Решить неравенства:

$$15.4. 4 \log_{16} \cos 2x + 2 \log_4 \sin x + \log_2 \cos x + 3 < 0.$$

$$15.5. \log |\cos x + \sqrt{3} \sin x| \frac{1}{2} > 0, \quad \text{если } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

$$15.6. \sin |\lg x| + \cos |\lg x| > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$15.7. \frac{\arccos(x^2 - 3x + 2)}{8x^2 - 10x + 3} > 0.$$

$$15.8. \operatorname{arctg} \sqrt{x} > \arccos(1-x).$$

Г л а в а 16

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

16.1. Доказать, что уравнение

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{6} = \frac{1}{x^2} + x^2$$

не имеет корней.

Решить уравнения:

16.2. $4^{\lg^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$. 16.3. $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$.

16.4. $\sin(2^{x-1} + 2^{x-2}) \cos(2^{x-1} + 2^{x-2}) = \frac{1}{4}$.

16.5. $\lg \sin x + \lg \sin 5x = \lg \sec 4x$.

16.6. $\lg^2(\sin x + 4) + 2 \lg(\sin x + 4) - \frac{5}{4} = 0$.

16.7. $\log_{\sin x} \left(\sin x - \frac{1}{4} \cos x \right) = 3$.

16.8. $\log_{8 \cos^2 x} \sin x = \frac{1}{2}$.

16.9. Найти положительные решения уравнения

$$\operatorname{tg} \left[5\pi \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] = 1.$$

16.10. Решить уравнение

$$\lg^2 \cos x + 2 \lg \cos x + m^2 + 2m - 3 = 0.$$

16.11. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$\lg^2 \sin x - 2a \lg \sin x - a^2 + 2 = 0.$$

16.12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{(3x-4y-15)} (2x-y) = 1, \\ \log_{(x+2y)} \cos [\pi(x+y)] = 0. \end{cases}$$

Глава 17

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение. *Комплексными числами* называются символы вида $a+bi$, $a+ib$, $a-bi$, $a-ib$, где a и b —действительные числа, а i —новый символ, если для них приняты следующие условия:

1. $a \pm bi = a \pm ib$; $a-bi = a+(-b)i$.
2. $a+0 \cdot i = a$.
3. $a+bi = c+di$ тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$.
4. Сложение и умножение определяются равенствами

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Из п. 2 этого определения следует, что если в комплексном числе $a+bi$ $b=0$, то это комплексное число является *действительным числом*.

Комплексное число $a+bi$ называется *мнимым*, если $b \neq 0$. Если в мнимом числе $a=0$, то оно называется *чисто мнимым*. Чисто мнимое число $0+bi$ обозначают просто bi . Чисто мнимое число $1 \cdot i$ обозначают просто i .

Из определения вытекает, что $i^2 = -1$. Действительно,

$$i^2 = i \cdot i = (0+i)(0+i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1 + 0 \cdot i = -1.$$

В комплексном числе $a+bi$ число a называется *действительной* его частью, b —*мнимой частью*, i —*мнимой единицей*.

В комплексном числе $a+bi$ знак плюс можно рассматривать как знак сложения. Действительно,

$$(a) + (bi) = (a+0 \cdot i) + (0+bi) = (a+0) + (0+b)i = a+bi.$$

Можно доказать, что bi есть произведение чисел b и i .

Действительную часть комплексного числа z обозначают $\operatorname{Re} z$, а его мнимую часть $\operatorname{Im} z$ ¹⁾.

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется неотрицательное число

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Точка, изображающая комплексное число z на координатной плоскости, называется *аффиксом* этого числа.

Числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *комплексно сопряженными*. Число, комплексно сопряженное числу z , обозначается $\bar{z}$. Аффиксы комплексно сопряженных чисел симметричны относительно действительной оси.

Непосредственно проверяется, что

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad |z| = |\bar{z}|.$$

¹⁾ Эти обозначения являются сокращениями французских слов réel (действительный) и imaginaire (мнимый).

Если $z = \bar{z}$, то z — действительное число.

Угол между положительным направлением оси Ox и радиусом-вектором аффикса комплексного числа z называется *аргументом* комплексного числа.

Если аргумент φ удовлетворяет неравенству $0 \leq \varphi < 2\pi$, то он называется *главным аргументом*.

Аргумент числа z обозначают $\text{Arg } z$, а главный аргумент $\arg z$.
 Всякое комплексное число z может быть представлено в виде

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где r — некоторое неотрицательное число, а φ — некоторый угол. Такая форма комплексного числа называется *тригонометрической*. Для числа $z = 0$ тригонометрическая форма не рассматривается, так как считается, что его аргумент не существует. Можно доказать, что если z представлено в тригонометрической форме, то r — модуль комплексного числа z , а φ — один из его аргументов.

Действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме, выполняются по следующим правилам.

$$1. \quad z_1 \cdot z_2 = [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

$$2. \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

3. Из правил умножения и деления комплексных чисел вытекает формула

$$z^n = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где n — целое число ¹⁾.

4. При n натуральном

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (*)$$

Здесь k — любое целое число. Чтобы получить n различных корней n -й степени из числа z , надо k придать значения последовательных n целых чисел. Например, положить k равным $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Формулу (*) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [r (\cos (\varphi + 2k\pi) + i \sin (\varphi + 2k\pi))]^{\frac{1}{n}} &= \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Поэтому можно считать, что правило возведения в степень верно и для нецелых рациональных показателей.

Пусть $\overline{OM}_1$ и $\overline{OM}_2$ — соответственно радиусы-векторы аффиксов комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$. Пусть $\overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 = \overline{OM}$. Так как проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций

¹⁾ Эту формулу называют *формулой Муавра*.

складываемых векторов, то

$$\text{Пр}_{Ox} \overline{OM} = \text{Пр}_{Ox} \overline{OM}_1 + \text{Пр}_{Ox} \overline{OM}_2 = x_1 + x_2,$$

$$\text{Пр}_{Oy} \overline{OM} = \text{Пр}_{Oy} \overline{OM}_1 + \text{Пр}_{Oy} \overline{OM}_2 = y_1 + y_2.$$

Поэтому M является аффиксом числа $z_1 + z_2$.

Итак, чтобы получить радиус-вектор аффикса суммы $z_1 + z_2$, надо сложить радиус-векторы аффиксов слагаемых z_1 и z_2 .

Вектор $\overline{M_1 M_2} = \overline{OM}_2 - \overline{OM}_1$, рисунок сделайте самостоятельно

Если провести вектор $\overline{OM} = \overline{M_1 M_2}$, то M будет аффиксом числа $z_2 - z_1$.

17.1. Доказать, что модуль суммы двух комплексных чисел не превосходит суммы модулей этих чисел.

17.2. Дано, что z — комплексное число, не равное ± 1 . Доказать, что число $\frac{z-1}{z+1}$ будет чисто мнимым тогда и только тогда, когда $|z| = 1$.

17.3. Найти аргумент комплексного числа $z^3 - z$, если $z = \cos \varphi + i \sin \varphi \neq 1$.

17.4. Представить в тригонометрической форме комплексное число

$$z = (1 - \cos \alpha + i \sin \alpha)^n,$$

где n — целое число, не равное нулю.

17.5. Найти модуль и все аргументы мнимого числа z , если $z + \frac{1}{z} = a$, где a — данное отрицательное число. При каких значениях a решение этой задачи возможно?

17.6. Вычислить значение выражения

$$z^{167} + \frac{1}{z^{167}}$$

для z , удовлетворяющего уравнению

$$z + \frac{1}{z} = 1.$$

17.7. Найти все комплексные числа z , удовлетворяющие равенству

$$\bar{z} = z^{n-1},$$

где $\bar{z}$ — комплексное число, сопряженное числу z , а n — натуральное.

17.8. Решить при всех неотрицательных значениях a уравнение

$$z|z| + az + i = 0.$$

17.9. Решить в комплексных числах систему уравнений

$$\begin{cases} z^{13}w^{19} = 1, \\ z^5w^7 = 1, \\ z^2 + w^2 = -2. \end{cases}$$

17.10. Найти геометрическое место точек z комплексной плоскости, для которых

$$|z-1| = |z-i|.$$

17.11. Найти геометрическое место точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$|z+i| \leq 1.$$

17.12. Найти геометрическое место точек z комплексной плоскости, для которых $\operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0$.

Г л а в а 18

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

При решении задач на составление уравнений основную трудность представляет собой перевод условия задачи с обычного языка на язык математических символов и уравнений. Наиболее ответственный этап этого процесса — выбор неизвестных. Нельзя шаблонно выбирать в качестве неизвестных величины, стоящие в вопросе задачи. Основное требование, которому должны отвечать выбранные неизвестные, состоит в том, чтобы с их помощью можно было прозрачно записать сформулированные в условии задачи соотношения.

Разберем в качестве примера следующую задачу.

Пример 1. Трое рабочих должны изготовить некоторое количество деталей. Сначала к работе приступил первый рабочий, а через некоторое время к нему присоединился второй. Когда $1/6$ часть работы была выполнена, к работе приступил третий рабочий. Работу они закончили одновременно. Сколько времени работал первый рабочий, если каждый рабочий изготовил одинаковое количество деталей, причем третий рабочий работал на два часа меньше второго? Известно, что первый и второй рабочие, работая вместе, могут изготовить требуемое количество деталей на 9 часов раньше, чем третий рабочий, если бы он работал один.

Известно, что каждый рабочий изготовил одинаковое количество деталей, т. е. выполнил треть всей работы. С другой стороны, нет никаких сведений о числе деталей, изготовленных кем-либо в какой-либо промежуток времени. Это означает, что речь идет о работе «вообще», о том, что каждый выполнял какую-то часть этой работы, а потому всю работу следует принять за единицу. Ту же мысль подтверждает и условие, в силу которого третий рабочий приступил к работе, когда $1/6$ часть работы (обратите внимание: $1/6$ всей работы, а не 45 или 27 деталей) была уже выполнена.

Из условия следует, что рабочие работают по-разному, другими словами, они изготовят разное количество деталей в одно и то же время. Поэтому нужно ввести в рассмотрение производительность каждого из них. Однако через x , y и z мы обозначим не количество деталей, изготавливаемых в час первым, вторым и третьим рабочими соответственно, а ту часть всей работы, которую каждый из них выполняет за это время.

После всего сказанного должно быть очевидным, что мы легко перепишем условие задачи в виде системы уравнений, если введем в рассмотрение еще три неизвестных: t_1 —время, которое работал первый рабочий, t_2 —второй, а t_3 —третий. Так как каждый из них сделал за это время треть всей работы, то

$$t_1x = t_2y = t_3z = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Мы получили три уравнения (можно было написать, что $t_1x = \frac{1}{3}$, $t_2y = \frac{1}{3}$, $t_3z = \frac{1}{3}$). К ним нередко добавляют четвертое:

$$t_1x + t_2y + t_3z = 1,$$

которое должно отражать то обстоятельство, что в итоге вся работа была выполнена. Однако это уравнение не содержит никакой самостоятельной информации: оно является следствием первых трех и получается в результате их сложения. Поэтому это уравнение, хотя и верно составлено, но бесполезно для решения задачи.

Так как первый и второй рабочие вместе выполняют всю работу за $1/(x+y)$ часов, а третьему на это потребуется $1/z$ часов, то еще одно условие задачи можно записать так:

$$\frac{1}{x+y} + 9 = \frac{1}{z}. \quad (2)$$

Составим теперь уравнение, отражающее тот факт, что третий рабочий приступил к работе, когда $1/6$ часть ее была выполнена. Другими словами, когда первый рабочий проработал $t_1 - t_3$ часов, а второй $t_2 - t_3$, они сделали $1/6$ часть всей работы:

$$x(t_1 - t_3) + y(t_2 - t_3) = 1/6. \quad (3)$$

Добавляя к этим пяти уравнениям шестое:

$$t_2 - t_3 = 2, \quad (4)$$

мы можем приступить к решению полученной системы уравнений.

Решая систему уравнений, как правило, следует держать в поле зрения два обстоятельства. Во-первых, систему уравнений нужно воспринимать в целом, так, как вы воспринимали бы ее, решая вне связи с задачей. Это позволит найти более рациональный ключ к ее решению. Во-вторых, нельзя упустить из виду те неизвестные (или комбинации неизвестных), которые позволят ответить на вопрос задачи. Благодаря этому можно обойтись без излишних вычислений.

В нашем примере второе обстоятельство должно побудить нас использовать уравнение (4) для упрощения уравнения (3), в результате чего из (3) будет исключено неизвестное t_2 , которое нас не интересует. Однако после замены $t_2 - t_3$ на 2 уравнение (3) потеряет симметрию относительно t_1x и t_2y , что затруднит использование уравнений (1). Если же в уравнении (3) раскрыть скобки и вспомнить, что $xt_1 = 1/3$ и $yt_2 = 1/3$, то получим уравнение

$$t_3(x+y) = 1/2.$$

С его помощью можно выразить $x+y$ через t_3 , а из уравнения $zt_3 = \frac{1}{3}$ можно выразить через t_3 и неизвестное z . Подставляя эти выражения в (2), получим

$$2t_3 + 9 = 3t_3,$$

откуда

$$t_3 = 9.$$

Дальнейшее решение системы не представляет труда. Находим последовательно: $t_2 = 11$, $z = 1/27$, $y = 1/33$. Из уравнения (2) определяем $x = 5/198$ и $t_1 = 1/(3x) = 66/5$. Итак, первый рабочий работал 13 часов 12 минут.

Эту же задачу можно было бы решить с помощью меньшего числа неизвестных, если ввести в рассмотрение, помимо величин x , y и z , имеющих прежний смысл, величину t , обозначающую время, в течение которого рабочие работали вместе, т. е. время работы третьего рабочего. Это привело бы нас к системе

$$t(x+y+z) = 5/6 \quad (1')$$

(за время t рабочие сделали вместе $5/6$ всей работы)

$$tz = (t+2)y = 1/3 \quad (2')$$

(за время t третий рабочий сделал треть всей работы, а второму на это потребовалось на 2 часа больше),

$$\frac{1}{x+y} + 9 = \frac{1}{z} \quad (3')$$

(первый и второй рабочие выполняют всю работу на 9 часов быстрее, чем третий, работая один).

Поскольку $tz = 1/3$, то из (1') найдем

$$x+y = \frac{1}{2t}.$$

Вместе с $z = \frac{1}{3t}$ подставим в (3'). Получим

$$t = 9.$$

Как и прежде, найдем последовательно z , y и x . На вопрос задачи можно ответить, вспомнив, что первый работал столько, чтобы успеть сделать $\frac{1}{3}$ всей работы, т. е. $\frac{1}{(3x)}$.

Конечно, второе решение выглядит более изящно, чем первое. Однако признать его лучшим трудно, поскольку за те простые уравнения, от которых мы отказались, пришлось уплатить некоторым усложнением логики.

А теперь приведем арифметическое решение этой задачи — решение, в котором удастся обойтись вообще без составления уравнений.

Так как рабочие совместно выполнили $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ всей работы, причем третий сделал $\frac{1}{3}$, то на долю первого и второго осталось $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ всей работы. Следовательно, если бы первый и второй рабочие успели выполнить всю работу, то третий за то же самое время сделал бы $\frac{2}{3}$; ему останется $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, на что ему потребовалось бы в силу последнего условия задачи 9 часов.

Так как каждый рабочий сделал одинаковое количество деталей, т. е. $\frac{1}{3}$ всей работы, то третий рабочий работал ровно 9 часов. Тогда второй работал $9 + 2 = 11$ часов. Так как он тоже сделал $\frac{1}{3}$ всей работы, то его производительность равна $\frac{1}{33}$ части всей работы в час. Мы знаем, что первый и второй рабочие тратят на $\frac{1}{2}$ всей работы столько же, сколько третий на $\frac{1}{3}$, т. е. 9 часов. Второй рабочий сделает за это время $(\frac{1}{33}) \cdot 9 = \frac{3}{11}$ всей работы. Следовательно, на долю первого приходится $\frac{1}{2} - \frac{3}{11} = \frac{5}{22}$. Его производительность $(\frac{5}{22}) : 9 = \frac{5}{198}$ в час, свою треть работы он выполнил

за $\frac{1}{3} : \frac{5}{198} = 13\frac{1}{5}$ часов = 13 часов 12 минут.

Хотя решение выглядит намного красивее, чем первые два, его тоже трудно назвать существенно лучшим. Взгляните внимательно на уравнения второго решения, и вы заметите, что третье решение получено почти «дословным» пересказом этих уравнений.

Таким образом, на пути к решению задачи вас не должно останавливать большое количество неизвестных, которые, по вашему мнению, следует ввести.

Однако старайтесь не вводить неизвестные, размерность которых не встречается в условии и не может быть получена как комбинация элементов условия. Введение таких неизвестных может усложнить задачу.

Вот простой пример.

Пример 2. Расстояние между двумя пунктами пароход проходит по течению реки на a часов быстрее, чем то же расстояние в стоячей воде, и на b часов быстрее, чем против течения ($b > a > 0$). За какое время пароход покрывает расстояние от A до B по течению?

Если ввести в рассмотрение неизвестные: v — скорость парохода в стоячей воде, w — скорость течения реки, x — расстояние, то

получим систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{x}{v} - \frac{x}{v+w} = a, \\ \frac{x}{v-w} - \frac{x}{v+w} = b. \end{cases}$$

Найти из этой системы величину $\frac{x}{v+w}$ можно, если сделать следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{x}{v-w} &= \frac{1}{\frac{v-w}{x}} = \frac{1}{\frac{v}{x} - \frac{w}{x}}, \\ \frac{x}{v+w} &= \frac{1}{\frac{v+w}{x}} = \frac{1}{\frac{v}{x} + \frac{w}{x}}, \end{aligned}$$

и обозначить $\frac{v}{x} = y$, $\frac{w}{x} = z$. Мы придем к системе относительно y и z , решив которую, вычислим $\frac{1}{y+z}$.

Однако такую систему можно было получить сразу, если бы мы не ввели в качестве неизвестного x пройденное парходом расстояние.

В условии задачи не было чисел, выраженных в километрах, однако расстояние между пунктами являлось существенным связующим звеном. Это означает, что мы должны были принять его за единицу, а скорости v и w выражать в частях расстояния, пройденных за один час. В результате мы пришли бы к системе

$$\begin{cases} \frac{1}{v} - \frac{1}{v+w} = a, \\ \frac{1}{v-w} - \frac{1}{v+w} = b, \end{cases}$$

которую не пришлось бы преобразовывать.

Разберем еще одну задачу, на примере которой видно, как решаются задачи на движение.

Пример 3. Из пункта C в пункт D выехал товарный поезд. Через 5 часов 5 минут навстречу ему из пункта D выехал пассажирский поезд. Они встретились в каком-то пункте A . После этого пассажирский поезд приехал в пункт C через 4 часа 6 минут, а товарный — в пункт D через 12 часов 55 минут. Сколько времени каждый поезд находился в пути.

Условия задачи можно отразить на схеме (рис. 18.1), где буквой B обозначено положение товарного поезда в момент выхода пассажирского из пункта D .

То обстоятельство, что оба поезда находились в точке A одновременно, мы отразим на схеме с помощью вертикального отрезка, связывающего оба пути. Схема подсказывает нам и выбор неизвестных. На путь от B до A товарный поезд потратил столько же времени, сколько пассажирский на путь от пункта D до A . Если обозначить это время через x , то на схеме не останется «белых пятен».

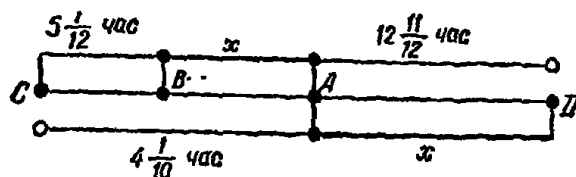


Рис. 18.1.

Пусть v_1 — скорость товарного поезда, а v_2 — скорость пассажирского поезда. Каждый из отрезков пути: от пункта C до A и от пункта D до A позволяет составить уравнение

$$12 \frac{11}{12} v_1 = x v_2,$$

$$\left(5 \frac{1}{12} + x \right) v_1 = 4 \frac{1}{10} v_2.$$

Можно составить и уравнение для всего пути:

$$\left(5 \frac{1}{12} + x + 12 \frac{11}{12} \right) v_1 = \left(x + 4 \frac{1}{10} \right) v_2,$$

которое является следствием (точнее, суммой) первых двух уравнений. Однако это уравнение проще второго. Поэтому мы будем решать систему

$$\begin{cases} 12 \frac{11}{12} v_1 = x v_2, \\ (18 + x) v_1 = (x + 4,1) v_2. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{12 \frac{11}{12}}{18 + x} = \frac{x}{x + 4,1},$$

откуда $x = 5$ часов 10 минут (второй корень отрицательный и не имеет физического смысла). Итак, товарный поезд пройдет весь путь за 23 часа 10 минут, а пассажирский — за 9 часов 16 минут.

18.1. Бассейн наполняется четырьмя трубами за 4 часа. Первая, вторая и четвертая заполняют бассейн за 6 часов. Вторая, третья и четвертая — за 5 часов. За сколько времени заполняют бассейн первая и третья трубы?

18.2. У продавца испортились весы (плечи весов оказались неравными). Продавец отпустил покупателю два веса: первый раз на одну чашку весов положил килограммовую гирю, а во второй раз поменял гирю и товар местами. Компенсировал ли продавец неточность весов?

18.3. Население страны ежегодно увеличивается на $1/80$. Через сколько лет население страны удвоится?

18.4. Одному буксиру нужно перевезти за наименьшее время два понтона вниз по реке на l км. Было решено, что один понтон будет отправлен по течению реки самостоятельно, а другой будет некоторое время транспортироваться буксиром, после чего буксир оставит его и вернется за первым, отбуксировав его до конечного пункта. Сколько километров должен транспортироваться второй понтон, чтобы оба пришли к конечному пункту одновременно, и сколько потребуется времени на всю перевозку, если собственная скорость буксира v , а скорость течения реки u ?

18.5. Некто родился в девятнадцатом веке. В 1901 году сумма цифр числа, выражающего год его рождения, равнялась сумме цифр числа, выражающего количество прожитых лет. Определить, в каком году родился некто.

18.6. Цена брильянта пропорциональна квадрату его веса. Брильянт весом в p карат был разбит на две части, после чего его стоимость уменьшилась в k раз. Найти вес частей, на которые был разбит брильянт ¹⁾.

18.7. Некоторую часть маршрута туристам предстоит совершить вверх по реке. В их распоряжении моторная лодка, способная развивать две скорости с разным расходом горючего. Если скорость течения реки окажется равной u км/ч, то при движении на любой из собственных скоростей будет затрачено одинаковое количество горючего. Если же скорость течения в k раз больше ($k > 1$), то при движении с собственной скоростью v_1 горючее будет израсходовано полностью, а при движении с собственной скоростью v_2 останется A кг горючего. Какое количество горючего будет затрачено на весь путь?

18.8. У продавца мороженого есть по несколько десятков порций мороженого пяти сортов — за 7, 9, 11, 13 и 15 копеек. Общее число порций равно 180, а общая стоимость —

¹⁾ 1 карат = 0,2 г.

18 руб. 40 коп. Порций мороженого по 7 и 9 копеек вместе столько же, сколько по 11, 13 и 15 копеек вместе. Кроме того, известно, что порций по 9 копеек вдвое больше, чем по 15 копеек, и больше, чем по 13 копеек. Определить число порций каждого сорта.

18.9. У школьника есть 1 рубль монетами достоинства до 10 копеек включительно. Известно, что если отобрать по одной монете каждого типа, имеющегося у школьника, то в сумме получится 15 копеек. Сколько монет каждого достоинства имеется, если монет самого большого достоинства больше числа всех прочих монет на 4?

18.10. Плоты шли из пункта A до устья реки вниз по течению. У устья реки их взял на буксир пароход и через 11,5 суток после выхода плотов из пункта A доставил их по озеру в пункт B . Сколько времени пароход вел плоты от устья реки по озеру до B , если известно, что пароход тратит на рейс (без буксировки) от A до B 40 часов и от B до A 48 часов, а скорость во время буксировки уменьшается вдвое.

18.11. Три пловца должны проплыть из A в B и обратно. Сначала стартует первый, через 5 секунд—второй, еще через 5 секунд—третий. Некоторую точку C , находящуюся между пунктами A и B , все пловцы миновали одновременно (до этого времени ни один из них в B не побывал). Третий пловец, доплыв до B и повернув назад, встречает второго в 9 м от B , а первого—в 15 м от B . Найти скорость третьего пловца, если расстояние AB равно 55 м.

18.12. Сосуд, содержащий $p\%$ -ный раствор кислоты, долили доверху $q\%$ -ным раствором кислоты и после перемешивания отлили то же количество. Проделав эту операцию k раз, получили $r\%$ -ный раствор. Какую часть объема сосуда занимал первоначальный раствор¹⁾.

18.13. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль. Одновременно из B навстречу ему выехал мотоцикл. Через некоторое время они встретились. В момент их встречи из B в A выехал второй мотоцикл и в некоторый момент времени встретился с автомобилем. Расстояние между пунктами

¹⁾ Удельные веса всех растворов предполагаются одинаковыми; при сливании двух растворов объем нового раствора равен сумме объемов исходных растворов.

первой и второй встреч равно $\frac{2}{9}AB$. Если бы скорость автомобиля была на 20 км/ч меньше, то автомобиль встретился бы с первым мотоциклом через 3 часа после их выезда и расстояние между пунктами встреч было бы равно 60 км. Найти AB , если скорости обоих мотоциклов одинаковы.

18.14. Пассажир, опоздавший на поезд, сначала решил догнать его на такси, однако через некоторое время пересел на автобус, заплатив за билет A рублей, и прибыл на одну из станций одновременно с поездом. Между тем он обнаружил, что если бы продолжал ехать на такси, то догнал бы поезд на τ часов раньше, истратив при этом на B рублей меньше. Какова скорость поезда, если скорость такси v_1 , автобуса v_2 ($v_1 > v_2$), а стоимость проезда 1 км на такси a рублей?

18.15. Товарный поезд, шедший из A в B , прибыл в C одновременно с пассажирским, шедшим из B в A со скоростью в m раз большей, чем скорость товарного поезда. Оба состава простояли t часов в пункте C , затем продолжили путь, причем каждый увеличил скорость на 25%. Товарный поезд прибыл в B на t_1 часов позже, а пассажирский в A на t_2 часов позже, чем если бы они двигались без остановки с первоначальной скоростью. Насколько раньше товарный поезд вышел из A , чем пассажирский из B ?

18.16. Расстояние между пунктами A и B равно s км. Из пункта A в пункт B вылетел вертолет, а через t часов в том же направлении вылетел самолет. Самолет догнал вертолет в d км от A , долетел до B и сразу повернул обратно. В d км от B самолет встретил вертолет и вернулся в A позднее, чем вертолет прибыл в B . Насколько раньше вертолет прибыл в B , чем самолет вернулся в A ?

18.17. В озеро впадают две реки. Пароход выходит из порта M на первой реке и плывет вниз по течению, затем через озеро (на озере течение отсутствует) и по второй реке вверх по течению до порта N . Придя в N , пароход отправляется в обратный путь.

Известна собственная скорость парохода φ и скорости течения рек: v_1 и v_2 . На путь от M до N , равный по длине s , и на обратный путь пароход тратит одинаковое время t . Какое расстояние пароход проходит по озеру?

Глава 19

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

Рассмотрим функцию натурального аргумента $a_n = f(n)$, где либо $n=1, 2, 3, \dots, k$, либо $n=1, 2, 3, \dots, k, \dots$. Если при любых натуральных i и j таких, что $i < j$, значение a_j считается последующим по отношению к a_i , то множество значений a_n этой функции образует *последовательность*.

Последовательность обозначают, записывая ее члены a_n один за другим в порядке возрастания номера n : $a_1, a_2, a_3, \dots$.

Если номер n принимает значения $n=1, 2, 3, \dots, k$, то последовательность называется *конечной*. Если же $n=1, 2, 3, \dots$ (т. е. n пробегает все натуральные числа), то последовательность называется *бесконечной*.

$a_n = f(n)$ называется *общим членом* последовательности. Если для любых i и j таких, что $i < j$, выполняется неравенство $a_i < a_j$, то последовательность называется *возрастающей*. Если при тех же условиях будет $a_i > a_j$, то последовательность называется *убывающей*.

Последовательность, в которой

$$a_{i+1} = a_i + d$$

при всех натуральных i , называется *арифметической прогрессией*. Число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

Имеют место формулы:

$$2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}; a_n = a_1 + d(n-1); S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n,$$

где S_n — сумма n первых членов прогрессии.

Последовательность, в которой

$$a_{i+1} = qa_i$$

при всех натуральных i , причем, $q \neq 0$ и $a_i \neq 0$, называется *геометрической прогрессией*, а число q называется ее *знаменателем*.

Для геометрической прогрессии имеют место формулы:

$$a_n = a_1 q^{n-1}; S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}; a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}.$$

Вторая формула верна, если $q \neq 1$. Бесконечная геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей*.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия не обязательно является убывающей последовательностью. Она может быть возрастающей, например, при $a_1 = -1$, $q = \frac{1}{2}$, а может быть колеблющейся: $a_1 = 1$, $q = -\frac{1}{2}$.

Если для бесконечной последовательности существует конечный предел последовательности ее сумм S_n , т. е. существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$,

то S называется *суммой* всех членов этой бесконечной последовательности.

Для того чтобы бесконечная геометрическая прогрессия имела сумму всех своих членов, необходимо и достаточно, чтобы она была бесконечно убывающей. В этом случае

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

19.1. Общий член последовательности $u_n = \frac{n! 2^n}{n^n}$. Является ли эта последовательность возрастающей или убывающей?

19.2. Доказать, что если члены a_p, a_q, a_r, a_s арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию, то последовательность $p-q, q-r, r-s$ является геометрической прогрессией.

19.3. Доказать, что если положительные числа a, b, c — соответственно m -й, n -й и p -й члены как арифметической, так и геометрической прогрессии, то

$$a^{b-c} b^{c-a} c^{a-b} = 1.$$

19.4. Доказать, что если a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\log_a x}{\log_c x},$$

где $x > 0, x \neq 1, a, b, c$ — различные положительные числа, отличные от единицы.

19.5. Найти сумму

$$S = 7 + 77 + 777 + \dots + 777\dots 7,$$

где последнее слагаемое содержит n цифр.

19.6. Доказать, что $\sqrt{11\dots 1 - 22\dots 2} = 33\dots 3$, где цифра 1 повторяется $2n$ раз, а цифры 2 и 3 только n раз.

19.7. При каких значениях x и y последовательность a_1, a_2, a_3 , где

$$a_1 = 8^{x+\log_2 y}, \quad a_2 = 2^{x-\log_2 y}, \quad a_3 = 5y,$$

является одновременно арифметической и геометрической прогрессией.

19.8. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 3x + A = 0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 12x + B = 0$. Известно, что

последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является возрастающей геометрической прогрессией. Найти A и B .

19.9. Решить уравнение

$$x^3 + x^2 + 2x + a = 0,$$

зная, что его корни образуют геометрическую прогрессию.

19.10. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма всех членов вдвое больше суммы первых n членов. Найти произведение первых n членов, если первый член равен $\sqrt{2}$.

19.11. Найти трехзначное число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию и которое делится на 45.

19.12. Найти трехзначное число по следующим условиям: его цифры образуют геометрическую прогрессию; если из него вычесть 594, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке; если цифры искомого числа увеличить соответственно на 1, на 2 и на 1, то получится арифметическая прогрессия.

19.13. Имеющиеся в совхозе комбайны, работая вместе, могут убрать урожай за одни сутки. Однако по плану комбайны возвращались с других полей и вступали в работу последовательно: в первый час работал лишь один комбайн, во второй — два, в третий — три и т. д. до тех пор, пока не начали работать все комбайны, после чего в течение нескольких часов перед завершением уборки урожая действовали все комбайны. Время работы по плану можно было бы сократить на 6 часов, если бы с самого начала уборки постоянно работали все комбайны, за исключением пяти. Сколько было комбайнов в совхозе?

19.14. Три брата, возраст которых образует геометрическую прогрессию, делят между собой некую сумму денег пропорционально своему возрасту. Если бы они это проделали через 3 года, когда самый младший окажется вдвое моложе самого старшего, то младший получил бы на 105, а средний на 15 рублей больше, чем сейчас. Сколько лет каждому из братьев?

19.15. Три отличных от нуля действительных числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел, взятые в том же порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найти всевозможные знаменатели этой геометрической прогрессии.

19.16. Даны два числа: a и b . Составим последовательность

$$a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots,$$

каждый член которой, начиная с третьего, равен среднему арифметическому двух предшествующих. Доказать, что

$$a_n = a + \frac{2}{3}(b-a) \left(1 - \frac{1}{4^n}\right),$$

$$b_n = a + \frac{2}{3}(b-a) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right),$$

и найти предел этой последовательности.

Г л а в а 20

СУММИРОВАНИЕ

При решении задач, связанных с последовательностями, приходится доказывать утверждения такого типа: «Для любого целого $n \geq p$ (где p — целое) справедливо...».

Доказательство этих утверждений базируется на аксиоме индукции.

Пусть для некоторого утверждения A доказаны две теоремы.

Теорема 1. Утверждение A справедливо для $n = p$.

Теорема 2. Из условия, что утверждение A справедливо для всех $p \leq n \leq k$, следует, что оно справедливо для $n = k + 1$.

Тогда в качестве аксиомы (она называется *аксиомой индукции*) принимают, что утверждение A справедливо для всех $n \geq p$ (p , p и k — целые числа).

Метод доказательства, основанный на использовании аксиомы индукции, называется *методом математической индукции*.

С помощью метода математической индукции можно доказать формулы

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

20.1. Доказать неравенство

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

20.2. В арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$ первый член равен разности прогрессии: $a_1 = d$. Считая число n данным, найти

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}.$$

20.3. Найти сумму

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

20.4. Найти зависимость между натуральными n и k , если

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \dots (1 + a^{2^k}),$$

где $a \neq 0, 1, -1$.

20.5. Найти коэффициент при x^n в разложении

$$(1 + x + 2x^2 + \dots + nx^n)^2.$$

20.6. Решить неравенство

$$|x - 2x^2 + 4x^3 - 8x^4 + \dots + (-2)^{n-1} x^n + \dots| < 1.$$

20.7. Найти сумму

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!.$$

20.8. Найти сумму

$$S_n = x + 4x^3 + 7x^5 + 10x^7 + \dots + (3n-2)x^{2n-1}.$$

20.9. Найти сумму

$$S_n^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4,$$

считая известными формулы для S_n , S_n^2 , S_n^3 (см. стр. 85).

20.10. Натуральные числа разбиты на группы

(1), (2, 4), (3, 5, 7), (6, 8, 10, 12), (9, 11, 13, 15, 17), ...

Найти сумму чисел в n -й группе.

20.11. Вычислить выражение

$$S_n = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Г л а в а 21

СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ

Напомним, что по определению принимается, что $C_n^0 = 1$ и $0! = 1$. Имеют место формулы

$$P_n = n!, \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

Правая часть последней формулы не меняется при подстановке вместо k выражения $n-k$. Это означает, что $C_n^k = C_n^{n-k}$. В приведенных выше трех формулах параметры n и k натуральные, причем $k \leq n$. В последних двух формулах k может равняться нулю.

Наряду с соединениями, в которые каждый из n различных элементов некоторого фиксированного множества входит один раз, можно рассматривать соединения с повторениями, допускающие появление одного и того же элемента более одного раза.

Если задан алфавит из n различных букв и поставлена задача составить всевозможные слова по k букв в каждом, то речь идет о размещении с повторениями. Обратите внимание на то обстоятельство, что слова могут быть любой длины, а потому нет необходимости в выполнении ограничения $k \leq n$. Слова *aba* и *baa* считаются различными (входящие в них элементы образуют разные последовательности).

Число $\bar{A}_n^k$ всевозможных различных размещений с повторениями из n различных элементов по k элементов в каждом находится по формуле

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Доказывается эта формула с помощью рекуррентного соотношения

$$\bar{A}_n^k = n \bar{A}_n^{k-1},$$

которое устанавливается следующим рассуждением. Если первая буква в слове из k букв фиксирована, то в оставшиеся $k-1$ ячеек можно разместить буквы $\bar{A}_n^{k-1}$ способами. Для каждого из этих способов остается n возможностей для выбора буквы, стоящей на первом месте. В результате мы получим все размещения с повторениями из n по k .

Размещения с повторениями, образованные из n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ так, что каждый из этих элементов входит в размещение по крайней мере один раз, называются *перестановками с повторениями*. Если известно, что элемент a_1 входит α_1 раз, элемент a_2 входит α_2 раз, ..., элемент a_n входит α_n раз, то число всевозможных таких перестановок обозначают $P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ и оно может быть найдено по формуле

$$P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}.$$

Вывод этой формулы основан на следующем соображении. Если бы все элементы, входящие в перестановку, были различными, то мы получили бы $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)!$ перестановок. Возьмем теперь любую из числа $P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ перестановок с повторениями. Она не изменится, если в ней осуществить всевозможные перестановки элементов a_1 , что можно сделать $\alpha_1!$ способами, затем всевозможные перестановки элементов a_2 , что можно сделать $\alpha_2!$ способами, ... и, наконец, всевозможные перестановки элементов a_n , что увеличит число возможных вариантов в $\alpha_n!$ раз. В результате мы получим $\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ перестановок, которые бы возникли из нашей перестановки с повторениями, если бы появилась возможность как-то различать входящие в нее одинаковые элементы, т. е.

$$\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)!,$$

откуда и следует формула для $P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$.

Два сочетания с повторениями из n элементов по k в каждом считаются различными тогда и только тогда, когда они отличаются по крайней мере одним элементом или какой-нибудь элемент входит в эти соединения разное число раз. Число всевозможных сочетаний с повторениями определяется по формуле

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k,$$

вывод которой состоит в доказательстве того факта, что допущение о возможности повторений элементов равносильно увеличению числа элементов, из которых образуются сочетания, на $k-1$.

Для любого натурального n справедливы разложения

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= C_n^0 x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} a^k, \\ (x-a)^n &= C_n^0 x^n - C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a^{n-1} x + \\ &+ (-1)^n C_n^n a^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k. \end{aligned}$$

Для биномиальных коэффициентов справедливы равенства:

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n &= 2^n, \\ C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n &= 0. \end{aligned}$$

21.1. Сколькими различными способами можно усадить за круглый стол n человек, если два способа считаются одинаковыми, когда каждый человек имеет тех же соседей (левый и правый соседи не различаются).

21.2. Имеется одна перестановка из пяти элементов: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Найти число всех перестановок из этих эле-

ментов, в каждой из которых на первом месте стоит элемент, отличный от a_1 , а на втором — элемент, отличный от a_2 .

21.3. Сколько можно образовать семизначных чисел из цифр 1, 2, 3, ..., 8 с тем, чтобы цифра 2 входила в каждое число не меньше чем три раза?

21.4. Сколько восьмизначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если в каждом числе цифра 1 содержится три раза, а остальные цифры по одному разу?

21.5. Экскурсантаы заказали на пароходе 8 четырехместных кают. Все места в каждой из кают и все каюты равноценны. Сколькими способами могут экскурсантаы разместиться в каютах, если их 32 человека?

21.6. Вычислить сумму

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n.$$

21.7. Найти сумму

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots + (-1)^k C_n^{2k},$$

где $n-1 \leq 2k \leq n$.

21.8. Найти все значения n , при которых какие-либо три последовательных коэффициента разложения бинома $(x+a)^n$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

21.9. Найти число неподобных между собой членов разложения

$$(a+b+c+d)^n.$$

21.10. Найти коэффициент при x^k в разложении

$$(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})^2.$$

21.11. Для бинома $\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right)^n$ найти натуральный показатель n , если известно, что десятый член разложения этого бинома имеет наибольший коэффициент.

21.12. Определить число отличных от нуля коэффициентов в разложении

$$(1+x^3+x^5)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{100}x^{100}.$$

21.13. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$. Сколькими способами ее можно разбить на группы, сохраняя фиксированный порядок ее элементов, каждая из которых состоит из одного элемента или двух рядом стоящих элементов?

21.14. На плоскости проведены m параллельных друг другу прямых и n прямых, пересекающих их и друг друга. Никакие три прямые не проходят через одну точку. На сколько областей (частей) эти прямые разбивают плоскость?

Г л а в а 22

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определения обратных тригонометрических функций приводят к следующим соотношениям.

Если $\arcsin x = \alpha$ (где $-1 \leq x \leq 1$), то $\sin \alpha = x$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Если $x \geq 0$, то $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$; если $x \leq 0$, то $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$.

Если $\arccos x = \alpha$ (где $-1 \leq x \leq 1$), то $\cos \alpha = x$ и $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Если $x \geq 0$, то $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$; если $x \leq 0$, то $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

Если $\operatorname{arctg} x = \alpha$, то $\operatorname{tg} \alpha = x$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Если $x \geq 0$, то $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$; если $x \leq 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$.

Если $\operatorname{arcctg} x = \alpha$, то $\operatorname{ctg} \alpha = x$ и $0 < \alpha < \pi$.

Если $x \geq 0$, то $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$; если $x \leq 0$, то $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$.

Имеют место следующие соотношения:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \quad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x; \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

22.1. Доказать, что

$$2\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}.$$

22.2. Представить выражение

$$\operatorname{arctg} \frac{7}{9} + \operatorname{arcctg} 8 + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$$

в виде значения функции $\arcsin x$.

22.3. Представить выражение

$$\operatorname{arctg}(-2) + \arcsin \frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

в виде значения лишь одной обратной тригонометрической функции.

22.4. Вычислить сумму

$$\arcsin \sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x}.$$

22.5. Найти

$$\operatorname{arccos}(\sin \pi(x^2 + x - 3)),$$

если $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

22.6. Доказать, что если $0 \leq x \leq 1$, то

$$\arcsin x - \arcsin \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

22.7. Доказать, что выражение

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$$

не зависит от x , если $x < -1$, и упростить его в этом случае.

Решить уравнения:

22.8. $\operatorname{tg}(3 \arcsin x) = 1.$

22.9. $\arcsin \frac{3x}{5} + \arcsin \frac{4x}{5} = \arcsin x.$

22.10. $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}.$

22.11. $\operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \operatorname{arctg}\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

22.12. $\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}.$

22.13. $\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x.$

Г л а в а 23

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Областью определения функции может быть вся числовая ось ($y = x^2$, $y = \sin x$), луч с принадлежащей ему граничной точкой ($y = \sqrt{x}$, граничная точка $x=0$ принадлежит области определения $x \geq 0$) и с не принадлежащей ему граничной точкой ($y = \lg x$), совокупность

интервалов (замкнутых, открытых, полуоткрытых) и отдельных точек.

Важной характеристикой функции является ее периодичность. С помощью периодических функций можно описать явления, повторяющиеся через равные промежутки времени. Часто определяют периодическую функцию так, чтобы она была бесконечно продолжаема как до $+\infty$, так и до $-\infty$. Мы же дадим определение, которое позволит нам рассматривать процессы, имеющие начало в некоторой точке x_0 и периодически повторяющиеся до $+\infty$, и процессы, выходящие из $-\infty$ и обрывающиеся в точке x_0 . Точка x_0 является либо нижней граничной точкой области определения функции, либо ее верхней граничной точкой.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что выполняются условия: 1) $f(x+T) = f(x)$ для любого значения аргумента x функции $f(x)$; 2) для любого значения аргумента x такого, что $x-T \geq x_0$, если $T > 0$ (x_0 — нижняя граничная точка), и $x-T \leq x_0$, если $T < 0$ (x_0 — верхняя граничная точка), число $x-T$ также является значением аргумента (т. е. принадлежит области определения функции).

Если T — период $f(x)$ и x — значение аргумента, то $x + nT$, где n — натуральное число, также значение аргумента и nT также период. Если период $T > 0$, то область определения функции не ограничена сверху; если же $T < 0$, то она не ограничена снизу.

Если T — период, то нельзя утверждать, что и $-T$ будет периодом, так как в точке $x-T$ функция может быть не определена.

Если период $T > 0$ и область определения не ограничена снизу, то $-T$ также период. Если период $T < 0$ и область определения не ограничена сверху, то $-T$ также период.

Если функция имеет периоды T и $-T$, то nT , где n — целое число, отличное от нуля, также является ее периодом.

Например, из того, что $\sin x$ имеет период 2π и область определения этой функции не ограничена снизу, следует, что -2π также период и вообще $n \cdot 2\pi$ — период ($n \neq 0$).

Наименьший положительный период называется *основным периодом*. Если функция не имеет положительного периода, то основным периодом называется период, наименьший по абсолютной величине.

23.1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_3 \sin x}.$$

23.2. Найти область определения функции

$$\log_3 \log_{1/2} (x^2 - x - 1).$$

23.3. При каких значениях x выражение $\sqrt{\log_{1/2} \frac{2x-3}{x+1}}$ принимает действительные значения?

23.4. Найти область определения функции

$$\arccos(x^2 - 3x + 1) + \operatorname{tg} 2x.$$

23.5. Где расположены точки плоскости, для координат которых выражение

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \frac{\lg(2-y)}{\sqrt{y-x^2}}$$

принимает действительные значения?

23.6. Доказать, что функция

$$y = \cos \sqrt{x}$$

не является периодической.

23.7. Доказать, что функция

$$y = \cos x^2$$

не является периодической.

23.8. Доказать, что если функция

$$f(x) = \sin x + \cos ax$$

периодическая, то a — рациональное число.

23.9. Найти основной период функции

$$y = \cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{3}.$$

Г л а в а 24

НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

24.1. Найти все значения x , при которых функция

$$\sin x - \cos^2 x - 1$$

принимает наименьшее значение.

24.2. Найти наибольшее значение функции

$$y = \sin 2x \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right).$$

При каких значениях x оно достигается?

24.3. Найти наибольшее значение функции

$$y = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x.$$

24.4. При каких значениях x и y выражение

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2$$

имеет наименьшее значение. Найти это наименьшее значение.

24.5. Найти наименьшее значение выражения

$$y = |x^2 - 1| + |x^2 - 4| + |x + 2| + |x + 1|.$$

24.6. Найти минимум функции

$$y = x^7 + \frac{a}{x^7}, \quad \text{где } x > 0, a > 0.$$

24.7. В круг радиуса R вписывается данный угол α . Какими должны быть длины хорд, образующих этот угол, чтобы их сумма была наибольшей.

24.8. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с площадью, равной 2 м^2 , а высота призмы равна гипотенузе основания. Какими должны быть стороны основания, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей?

24.9. Найти сторону наибольшего из квадратов, внутренние точки которых находятся внутри правильного шестиугольника со стороной a .

ПЕРВЫЕ УКАЗАНИЯ

1.1. Если через точку D_1 касания окружностей провести их общую касательную, то, пересекая продолжения сторон BA_1 и BC_1 , она образует треугольник A_1BC_1 (рис. 1.1.1). Воспользуйтесь тем, что $OD = DD_1 = R/2$, а $O_1D_1 = BD_1/3$.

1.2. В треугольнике AOB (O — центр вписанной окружности, рис. 1.1.2) угол BAO равен $\alpha/2$, а угол BOA равен сумме углов OAD и ODA , т. е. равен $\pi/2 + \alpha/2$. По условию $BO = m$, так как $BD = r + m$. Поэтому решение удобно начать с определения AB из треугольника BOA .

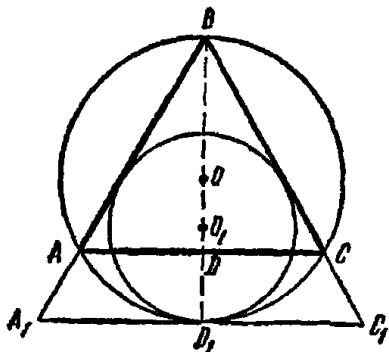


Рис. 1.1.1.

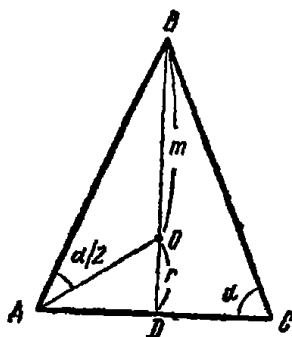


Рис. 1.1.2.

1.3. Вначале нужно выяснить смысл выражения «окружность делит сторону треугольника пополам». Если окружность имеет со стороной треугольника две общие точки, то ни про одну мы не сможем сказать, что она делит отрезок пополам, поскольку отрезок разделится на три части.

1.4. Отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC (рис. 1.1.4) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} &= \frac{S_{ABC} - (S_{A_1B_1C} + S_{A_1BC_1} + S_{AB_1C_1})}{S_{ABC}} = \\ &= 1 - \left(\frac{S_{A_1B_1C}}{S_{ABC}} + \frac{S_{A_1BC_1}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} \right). \end{aligned}$$

Теперь нужно найти каждое из отношений, входящих в правую часть.

1.5. Углы определяют треугольник лишь с точностью до подобия. Если ввести в рассмотрение один линейный элемент и выразить через него обе площади, то при подсчете отношения площадей этот элемент сократится. В качестве такого линейного элемента удобно выбрать радиус r вписанной в треугольник окружности.

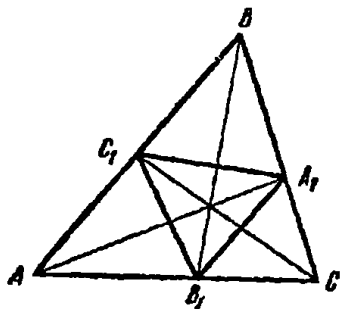


Рис. 1.1.4.

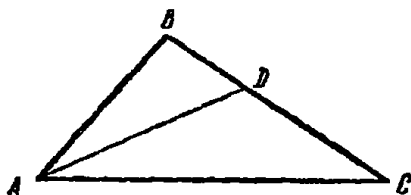


Рис. 1.1.6.

1.6. Так как $B=3C$ (рис. 1.1.6), то сторона AB меньше стороны AC и можно доказать, что площадь треугольника ABD (AD — биссектриса треугольника ABC) меньше площади треугольника ADC .

Таким образом, по условию, $\frac{S_{ADC}}{S_{ABD}} = 2$.

1.7. Применить метод сравнения площадей.

1.8. Все участвующие в задаче величины связаны с площадью треугольника, которая известна. Воспользоваться сравнением площадей.

1.9. В треугольнике даны две биссектрисы и отношение, в котором эти биссектрисы делятся точкой их пересечения. Наряду с данными отношениями естественно воспользоваться свойством отрезков, на которые биссектриса делит противоположную сторону треугольника. Поскольку требуется определить углы треугольника, то от отношений линейных величин удобно перейти к отношению тригонометрических функций искомых углов с помощью теоремы синусов.

1.10. Продолжить отрезок QM до пересечения в точке A с другой стороной угла.

1.11. Известные высоты треугольника естественно связать между собой с помощью его площади. При этом вместо сторон треугольника удобнее ввести в рассмотрение его углы, выразив стороны через третью высоту.

1.12. В соотношении $b+c=k$ выразить b и c через известную высоту h и тригонометрические функции углов B и C .

1.13. Первый способ. Чтобы решить задачу, нужно установить связь между углом α , сторонами треугольника и его площадью. Однако установить эту связь непосредственно не удастся. Поэтому необходимо ввести в рассмотрение вспомогательные элементы, например перпендикуляры длины x , y и z , опущенные из точки O на стороны a , b и c соответственно.

Второй способ. Чтобы установить связь между углом α , сторонами треугольника и его площадью, можно ввести в рассмотрение длины отрезков: $OA=l$, $OB=m$, $OC=n$.

1.14. По условию $CD=BC-AC$ (D —основание высоты). Однако BC и AC можно выразить через CD с помощью тригонометрических функций углов треугольника ABC . Это даст нам уравнение, связывающее углы треугольника ABC .

1.15. Если ввести в рассмотрение длины сторон $AC=b$ и $BC=a$, то все участвующие в задаче геометрические величины будут связаны с площадью треугольника ABC .

1.16. Чтобы геометрически связать окружность с центром O и окружность с центром O_1 , нужно провести отрезки CO и BO (рис. 1.1.16). Окружность O_1 описана около треугольника COB . Длина хорды CB известна. Следовательно, для того, чтобы найти радиус, достаточно определить угол COB .

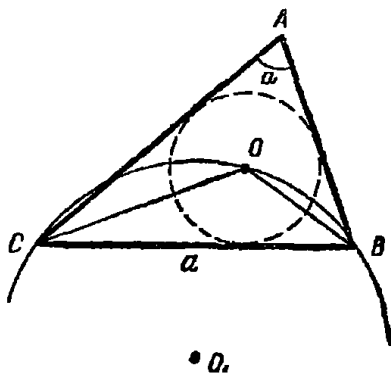


Рис. 1.1.16.

1.17. Задачу удобно переформулировать иначе: проведем через центр вписанной окружности прямую, параллельную средней стороне, и докажем, что она пройдет через точку пересечения медиан, т. е. точка пересечения этой прямой с медианой, опущенной на меньшую сторону, делит медиану в отношении 2:1.

1.18. Воспользоваться методом сравнения площадей.

1.19. Точки A , O и L лежат на одной прямой—биссектрисе угла BAC , аналогично точки B , O и K лежат на биссектрисе угла ABC . Прямая KL делит угол ACM пополам (CM —продолжение BC). По условию, $A=2C$, а $B=4C$ (рисунок сделайте самостоятельно).

1.20. Так как сумма углов в треугольнике равна π , то углы A , B и C нетрудно вычислить.

1.21. Сделать несложное дополнительное построение, чтобы получились подобные треугольники.

1.22. Поскольку отрезки, длины которых входят в правую часть равенства, лежат на одной прямой, нужно выразить длины всех отрезков, участвующих в левой части равенства, через длины отрезков, лежащих на той же прямой. Тем самым мы «спрямим» записанное соотношение и сделаем его доказательство простым.

1.23. В формулу входят отношения. Поэтому целесообразно сделать дополнительные построения, в результате которых получатся подобные треугольники.

1.24. При построении, описанном в условии, возникают подобные треугольники. Нужно с их помощью заменить стоящие в левой части отношения новыми отношениями с тем, чтобы в знаменателе была одна и та же сторона треугольника, а в числителе—отрезки этой стороны. ↓

1.25. Положение прямой, проходящей через точку O , можно определить с помощью угла α , который эта прямая составляет с

некоторым фиксированным радиусом описанной окружности. Нужно доказать, что величина, о которой говорится в условии, не зависит от α .

1.26. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно знать стороны данного треугольника и радиус описанной около него окружности. С вычисления этих величин и следует начать решение задачи.

1.27. Связать углы треугольника и его стороны можно либо с помощью теоремы синусов, либо с помощью теоремы косинусов. Данное в условии соотношение между сторонами треугольника подсказывает, что теорема косинусов удобнее.

1.28. Если отрезки OA , OB и OC , входящие в данное соотношение $OA^2 = OB \cdot OC$, выразить через радиус r вписанной окружности и углы треугольника, то должно получиться соотношение между тригонометрическими функциями этих углов, не содержащее r . ↓

1.29. Применить формулу, выражающую площадь треугольника через две стороны и синус угла, и теорему косинусов. ↓

1.30. Чтобы доказать равенство двух отрезков, о которых идет речь в условии, можно ввести элементы, определяющие треугольник, и выразить через них эти отрезки. То же самое можно сделать геометрически: четырехугольник $O_1 E D O_2$ (рис. 1.1.30), построенный на отрезке $O_1 O_2$, таков, что каждая из трех его остальных сторон равна половине соответствующей стороны треугольника. Остается построить такой же четырехугольник на отрезке BO_2 .

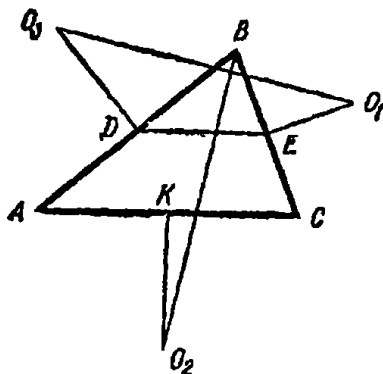


Рис. 1.1.30.

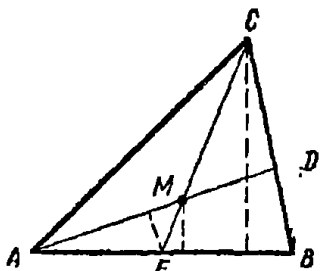


Рис. 1.1.31.

1.31. Площадь треугольника AFM (рис. 1.1.31) в восемь раз меньше площади треугольника ABC , так как $AF = \frac{1}{2} AB$, а высота треугольника AFM в четыре раза меньше высоты треугольника ABC (докажите). Если рассмотреть AM и AD как основания треугольников AFM и ABD , то соответствующие высоты этих треугольников относятся, как 1:2. Если мы сможем выяснить, в каком отношении точка M делит отрезок AD , то задача будет решена.

1.32. Так как четырехугольник вписанный, то кроме входящих в задачу величин целесообразно ввести в рассмотрение радиус круга R и углы четырехугольника. Введя в рассмотрение углы, мы сможем использовать свойство вписанного четырехугольника.

1.33. Вначале нужно использовать тот факт, что боковые стороны трапеции и отрезок, соединяющий середины ее оснований, лежат на прямых, пересекающихся в общей точке.

1.34. Если обозначить сторону квадрата через a , а расстояние от точки M до самой ближней стороны (либо до AB , либо до CD) через x , то остальные расстояния можно выразить через a и x .

1.35. Фигура, площадь которой нужно определить, на рис. 1.1.35 заштрихована. Отрезок CD разбивает искомую площадь на правильный треугольник и трапецию. Длина отрезка AF известна, она равна $3/2$. Если мы сможем определить длину отрезка CE (обозначим ее x), то задача будет решена.

1.36. Из параллельности сторон трапеции и треугольника следует, что углы при основании треугольника и при нижнем основании трапеции равны. Если обозначить эти углы через α , то можно выразить через α и другие углы, связанные с треугольником и трапецией.

1.37. Треугольники AOD и BOQ подобны. Это позволяет из отношения оснований трапеции получить отношение высот треугольника AOD и трапеции. †

1.38. Нас интересует периметр третьего многоугольника. Обозначим его через x . Введем также радиус окружности R и число сторон n первого многоугольника.

1.39. Окружность не может лежать между точками M и O (докажите). Ее центр O_1 лежит на биссектрисе угла AOB .

1.40. Из данного отношения площадей треугольников ABC и ADE , записанного в виде отношения произведений катетов, и из свойства произведения секущей на ее

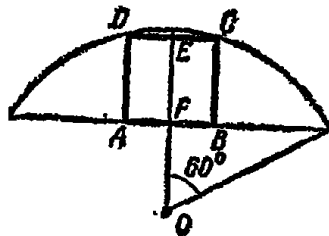


Рис. 1.1.43.

1.43. Вписанный в сегмент квадрат не должен нарушать симметрии сегмента. Поэтому он расположится так, как показано на рис. 1.1.43. Обозначим половину стороны квадрата через x и составим уравнение относительно x .

1.44. Чтобы использовать условия задачи, нужно провести радиусы обеих окружностей в точке касания окружностей друг к другу и с нижним основанием. Центр меньшей окружности лежит на биссектрисе угла D .

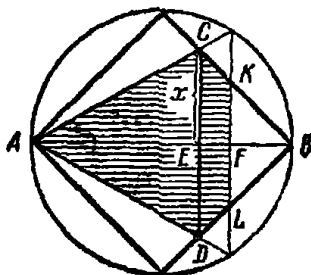


Рис. 1.1.35.

внешнюю часть найти отношение $\frac{AE}{AB}$.

1.41. Пусть O_1 — центр окружности, радиус которой мы ищем, а O — центр данной окружности. В качестве связующего звена следует рассмотреть треугольник AOO_1 .

1.42. Нужно обозначить сторону квадрата через a и составить с помощью теоремы Пифагора биквадратное уравнение для определения a через R и r .

1.45. Вначале для определенности удобно предположить, что точки P и Q лежат по разные стороны от CD . В этом случае диаметр CD разделит фигуры $PQNM$ и P_1Q_1D на две части (рис. 1.1.45). Нужно доказать, что площадь фигуры $CQNK$ равна площади треугольника Q_1OD . При этом полезен будет следующий факт. Если соединить точки Q и O , то, во-первых, угол QOC вдвое больше угла QDC , а во-вторых, треугольники OQ_1D и OQD равновелики.

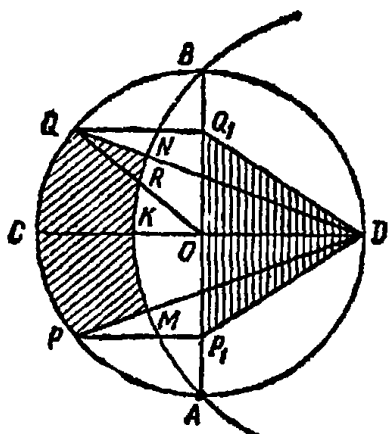


Рис. 1.1.45.

1.46. Соединим точки A и B , P и M и проведем радиусы из центра O в точки A и B (рис. 1.1.46). Если длины отрезков AB , AP_1 и $OA=R$ заданы и отрезок AB построен, то прямоугольный треугольник APB и положение точки O определяются однозначно. Следовательно, зная длины этих отрезков, можно вычислить длину интересующего нас отрезка PM .

1.47. Отрезок, соединяющий центр окружности с серединой хорды, перпендикулярен к этой хорде. Зная, что хорда удалена от центра на $\frac{3}{5}R$,

легко выразить ее длину через R .

1.48. Использовать геометрически касание окружности O_2 с окружностью O_1 можно, соединив их центры (рис. 1.1.48). Отрезок O_2O_1 пройдет через точку касания.

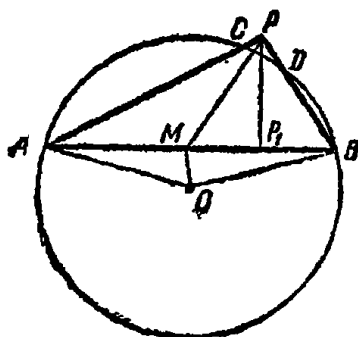


Рис. 1.1.46.

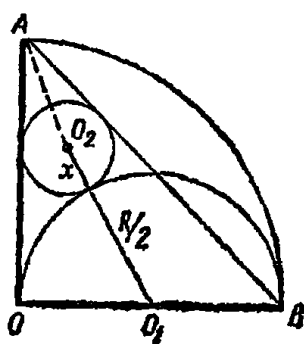


Рис. 1.1.48.

Так как окружность O_2 касается сторон угла OAB , то ее центр лежит на биссектрисе угла OAB .

1.49. Если провести высоту AN (рис. 1.1.49), то искомая площадь будет равна $\frac{1}{2}AN \cdot BC$. Соединив точки M и C , разобьем

треугольник ABC на равнобедренный треугольник MCB и треугольник AMC , у которого угол AMC легко выразить через φ .

2.1. Предположим, что мост где-то построен (рис. 1.2.1). В этом случае путь из A в B будет ломаной, состоящей из трех звеньев.

Среднее звено всегда остается неизменным по длине и направлению. Следовательно, нужно «спрямить» первое и третье звенья.

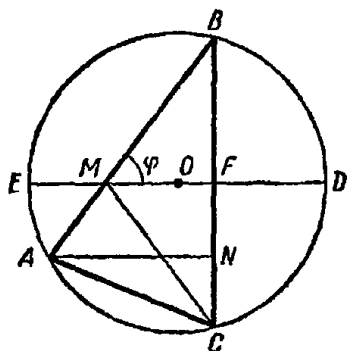


Рис. 1.1.49.

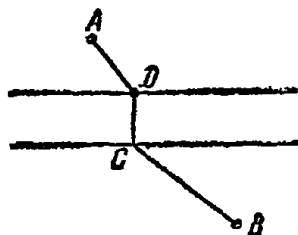


Рис. 1.2.1.

2.2. Из точки A отрезки MP и PN видны под углом 30° каждый. Следовательно, построить точку A можно как пересечение двух сегментов, вмещающих угол в 30° .

2.3. Пусть треугольник ABC (рис. 1.2.3) искомым. Чтобы на чертеже появился угол φ , отразим треугольник ABC от вертикальной оси, проходящей через середину BC . Обратите внимание на треугольник CA_1A .

2.4. В любом треугольнике ABC центр описанной окружности лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин сторон. Этот факт можно использовать для того, чтобы связать данные элементы треугольника: b и m_c .

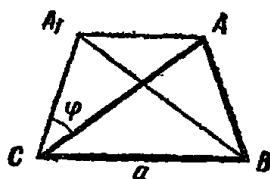


Рис. 1.2.3.

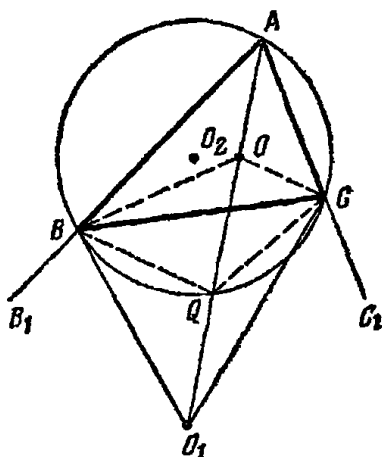


Рис. 1.2.5.

2.5. Точки O (центр вписанной окружности) и O_1 (центр внеписанной окружности) лежат на биссектрисе угла A треугольника ABC (рис. 1.2.5). Отрезки OC и O_1C , OB и O_1B взаимно

перпендикулярны как биссектрисы смежных углов. Поэтому точки B, O, C, O_1 лежат на одной окружности с центром в точке Q .

2.6. Применить метод подобия, выбрав за центр подобия одну из вершин треугольника, A или C .

2.7. Если прямую FE (рис. 1.2.7) вращать около точки M , то площади треугольников OMF и OME будут изменяться так, что с увеличением одной уменьшается другая. Это должно навести на мысль рассмотреть некоторое среднее положение.

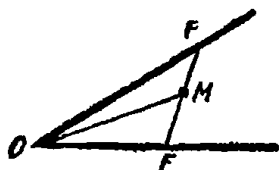


Рис. 1.2.7.

2.8. Чтобы использовать данный в условии периметр треугольника, нужно осуществить «спрямление», т. е. рассмотреть треугольник, который получается из искомого, если отложить на BC отрезки A_1B и CA_2 , равные AB и AC соответственно, так, как это показано на рис. 1.2.8.

2.9. Чтобы подойти к решению задачи, нужно построить из отрезков AP, BP и CP ломаную с закрепленными концами и посмотреть, когда эта ломаная будет выпрямляться.

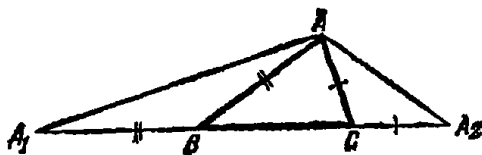


Рис. 1.2.8.

2.10. Зная гипотенузу, можно построить окружность, в которую вписан искомый прямоугольный треугольник ABC . Если биссектрису CD продолжить до пересечения с этой окружностью в точке E , то получим две равные дуги AE и EB . Следовательно, отрезок OE , соединяющий точку E с центром круга, перпендикулярен к AB и равен $c/2$. Теперь все данные в условии элементы связаны между собой.

2.11. Пусть известны углы при вершинах A и D четырехугольника и его стороны $AB=a, BC=b, CD=c$. Если угол BAD закреплён, то положение точки C определяется с помощью метода геометрических мест.

2.12. Пусть AM (рис. 1.2.12) — искомая секущая и $AB=BM$. Чтобы связать ее с данной окружностью, соединим точки O и B . Если отрезок OB продолжим за точку B и отложим $BC=OB=R$, то точки O, A, C и M можно рассматривать как вершины параллелограмма.

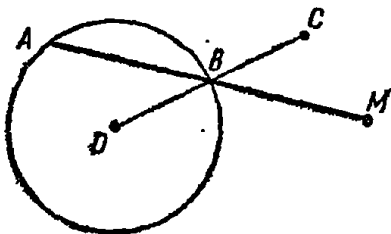


Рис. 1.2.12.

2.13. Пусть через точку M пересечения двух окружностей с центрами O и O_1 (рис. 1.2.13) проведена секущая AB данной длины. Чтобы связать ее с каждой из окружностей, нужно провести к ней

перпендикуляры OC и O_1D . Отрезок CD вдвое меньше отрезка AB , так как точки C и D — середины хорд AM и MB .

2.14. Если хорда AB искомая, то $MB - AM = a$. Построим отрезок BN , равный AM (рис. 1.2.14). Точки M и N лежат на одинаковом расстоянии от точки O и $MN = a$.

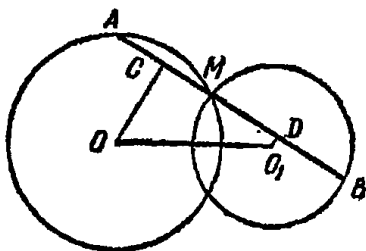


Рис. 1.2.13.

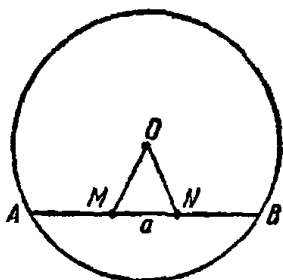


Рис. 1.2.14.

2.15. Так как длина отрезка PQ и несущая его прямая известны, то можно воспользоваться методом параллельного переноса.

2.16. Отрезок FD (рис. 1.2.16) должен делиться в точке M пополам. Следовательно, его можно рассматривать как одну из диагоналей параллелограмма. Другую диагональ нужно выбрать так, чтобы с ее помощью можно было восстановить весь параллелограмм.

2.17. Если через точки A и B провести прямую, то она, вообще говоря, должна пересечь прямую PQ в некоторой точке C . Остается воспользоваться свойством секущей и касательной, проходящих через общую точку. Случай, когда AB и PQ параллельны, рассмотрите отдельно.

2.18. Соединить точку M с концами A и B данного диаметра. Рассмотреть получившиеся точки пересечения с окружностью.

2.19. Воспользоваться предыдущей задачей и построить произвольный перпендикуляр к данному диаметру, пересекающий окружность в точках C и D .

3.1. Чтобы связать участвующие в задаче элементы, нужно отрезок OA луча, перпендикулярного к ребру, спроектировать на другую полуплоскость. Проекцию OB этого отрезка спроектировать в отрезок OC , лежащий на втором луче.

3.2. Чтобы связать данные углы с величиной угла, который нужно найти, следует спроектировать катеты треугольника на плоскость P и построить искомый угол.

3.3. При проектировании угла α на плоскость P возникает четырехгранный угол, в котором три плоских угла даны, а два двугранных угла прямые. Чтобы установить связь между плоскими углами, нужно пересечь этот четырехгранный угол плоскостью Q , перпендикулярной к плоскости P .

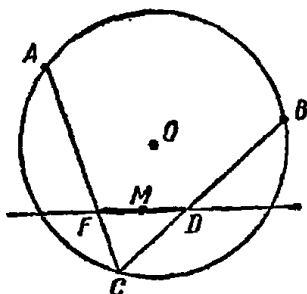


Рис. 1.2.16.

3.4. Если спроектировать искомую прямую, параллельную a , на плоскость, перпендикулярную к a , то мы получим точку. Спроектируйте на эту же плоскость три оставшиеся прямые.

3.5. Начать нужно с построения искомого угла. Для этого обе прямые нужно перенести в одну точку. Если сместить прямую SC , то она «повиснет в воздухе» и угол, который мы получим, не будет связан

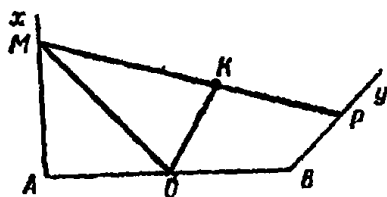


Рис. 1.3.6.

с треугольником. Поэтому проведем через точку C прямую CD , параллельную AB ; угол SCD искомый.

3.6. Лучи Ax и By удобно расположить так, как показано на рис. 1.3.6. Утверждение, что $OK=AO$, равносильно утверждению, что $AM=MK$ (рассмотрите прямоугольные треугольники OAM и OKM).

3.7. Если такое сечение четырехгранного угла существует, то в результате параллельного сдвига плоскости этого сечения мы получим новую плоскость, пересечение которой с четырехгранным углом — тоже параллелограмм. Поэтому строить сечение можно в любой точке ребра четырехгранного угла.

3.8. Если продолжить DE и BC до пересечения в точке F , то BD — средняя линия в треугольнике EFC (рис. 1.3.8). Площадь треугольника DEA равна половине площади треугольника FEA .

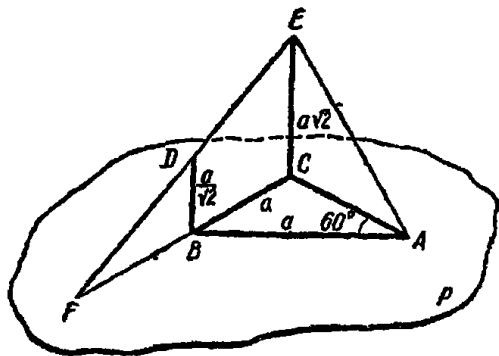


Рис. 1.3.8.

3.9. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно определить высоту H пирамиды. Можно измерить с помощью

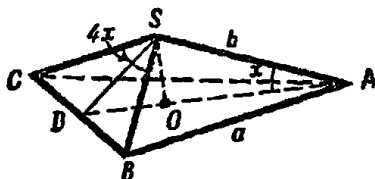


Рис. 1.3.11.

линейного угла, опирающегося на высоту H . Остается использовать тот факт, что в основании лежит правильный треугольник.

3.10. Докажите, что высота, проведенная в треугольнике ADB через вершину D , проходит через середину E основания AB . Тогда интересующий нас двугранный угол измеряется линейным углом DEC .

3.11. Условия задачи отражены на рис. 1.3.11. Сторона a основания известна, так как известна площадь основания.

3.12. Аналогичное построение на плоскости приводит к образованию треугольника, подобного данному, с коэффициентом подобия $1/2$. Поэтому и здесь следует постараться выяснить, подобны ли рассматриваемые тетраэдры.

3.13. Чтобы доказать, что пирамида правильная, нужно убедиться, что в основании лежит правильный треугольник и вершина пирамиды проектируется в центр основания. Вначале удобнее доказать второе утверждение, так как первое из него легко получить, установив равенство треугольников, имеющих одним из катетов высоту пирамиды, а гипотенузой — отрезок, проходящий через вершину пирамиды и точку касания шара с боковой гранью.

3.14. Построить усеченную пирамиду до полной и ввести в рассмотрение высоты пирамид, имеющих три основания, о которых идет речь в условии.

3.15. Построить угол между скрещивающимися прямыми можно, если параллельно перенести их так, чтобы они проходили через одну точку. В качестве такой точки удобно выбрать вершину A основания пирамиды. Если мы построим треугольник ABC , лежащий в основании, до параллелограмма $ABCE$ (рисунок сделайте самостоятельно), то угол DAE будет искомым. Образовавшаяся в результате четырехугольная пирамида будет состоять из ребер данной длины, за исключением ребра DE .

3.16. Тетраэдр разбивается на две пирамиды с общим основанием — плоскостью сечения. Данное отношение объемов позволяет найти отношение высот этих пирамид и, следовательно, отношение синусов искомых углов.

3.17. Условия задачи отражены на рис. 1.3.17. Нас интересует отношение площадей треугольников DAM и DMS , в то время как все известные элементы сосредоточены в плоскости KSE . Поэтому нужно связать элементы треугольников DAM и DMS с элементами треугольника KSE .

3.18. Использовать условие задачи, согласно которому высота пирамиды, опущенная из вершины D , проходит через точку пересечения высот основания ABC , с тем, чтобы доказать, что треугольники ADB и ADC прямоугольные.

3.19. В пирамиде $SABC$ (рис. 1.3.19) равнобедренные треугольники ASB и ACB равны. Следовательно, проведенные в них высоты из вершин S и C упадут в точку D — середину AB .

3.20. Если верхний из двух равных треугольников, лежащих один на другом в плоскости, начать вращать вокруг их общей стороны, то образованный ими двугранный угол может быть как острым, так и тупым. Поэтому придется рассмотреть два случая.

3.21. Если в основании ABC пирамиды провести высоту BD , то отрезок SD разделит угол ASC пополам.

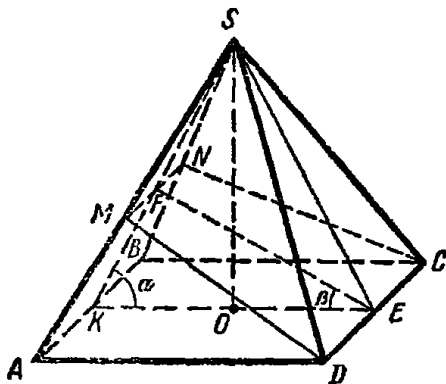


Рис. 1.3.17.

3.22. Покажите, что отрезки AB и CD взаимно перпендикулярны. Центр описанного шара лежит на их общем перпендикуляре KM , где K —середина CD , M —середина AB .

3.23. Расстояние от основания высоты до бокового ребра измеряется отрезком перпендикуляра, опущенного на боковое ребро. Чтобы связать участвующие в задаче величины, нужно измерить

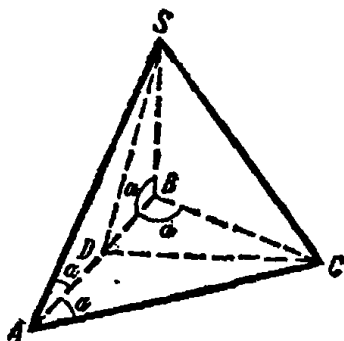


Рис. 1.3.19.

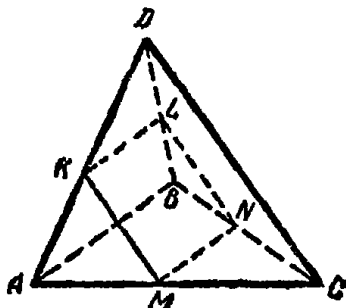


Рис. 1.3.24.

двугранный угол α линейным углом, построенным в точке бокового ребра, которая является основанием этого перпендикуляра. Следовательно, придется построить сечение пирамиды, проходящее через основание высоты и перпендикулярное к боковому ребру пирамиды.

3.24. Чтобы в сечении получился квадрат, плоскость сечения необходимо провести так, чтобы она пересекала все четыре грани пирамиды (иначе мы получили бы в сечении треугольник). Докажите, что если $KLMN$ —квадрат (рис. 1.3.24), то плоскость $KLMN$ параллельна двум скрещивающимся прямым AB и CD .

3.25. Для того чтобы найти наиболее рациональное решение задачи, поставьте пирамиду на одну из боковых граней (рис. 1.3.25), а затем примените сравнение объемов.

3.26. Вписать в пирамиду куб значит расположить его так, чтобы нижнее основание куба лежало на основании пирамиды, а верхнее основание куба было вписано в треугольник, полученный в горизонтальном сечении пирамиды (рис. 1.3.26).

3.27. Условия задачи отражены на рис. 1.3.27.

3.28. По условию задачи попарно равны именно те ребра тетраэдра, которые лежат на скрещивающихся прямых. Использовать это условие можно, если расположить тетраэдр так, чтобы ребро

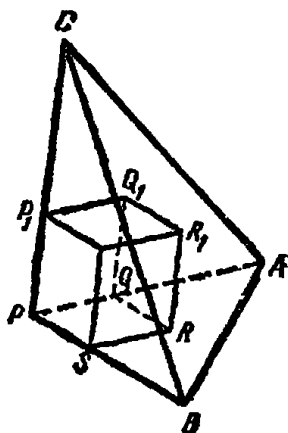


Рис. 1.3.25.

AB лежало в горизонтальной плоскости P , а ребро DC было параллельно этой плоскости.

3.29. Нужно построить расстояние между прямыми AB и CD . Для этого через один из отрезков, например через AB , надо провести плоскость P , параллельную CD .

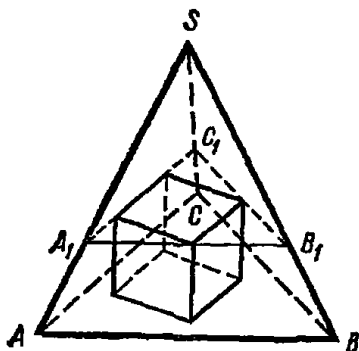


Рис. 1.3.26.

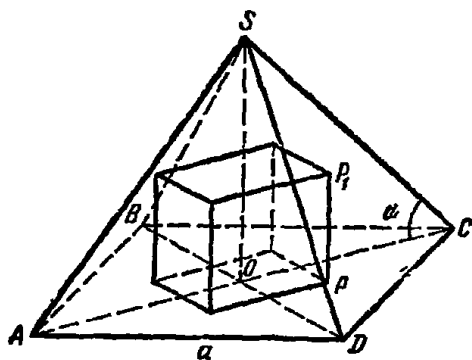


Рис. 1.3.27.

Решение естественно начать с построения плоскости P , проходящей через одно ребро (AB) и параллельной другому (CD). Удобный чертеж можно получить, повернув пирамиду вокруг AB так, чтобы плоскость P стала горизонтальной.

Далее нужно построить угол между скрещивающимися прямыми AB и CD . Напомним, что для этого достаточно построить прямую, пересекающую одну из них и параллельную другой.

3.30. Плоскость A_1BC отсекает от призмы четырехугольную пирамиду. Расположим ее так, как показано на рис. 1.3.30. То, что в эту пирамиду вписан шар радиуса R , означает, что в треугольники $B_1A_1C_1$ и DA_1E вписаны окружности радиуса R .

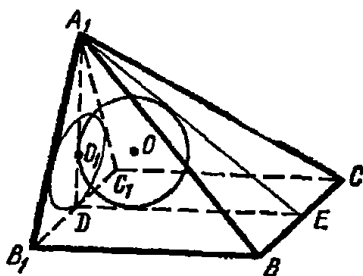


Рис. 1.3.30.

3.31. В силу соображений симметрии центр шара, о котором идет речь в задаче, совпадает с центром шара, вписанного в правильный тетраэдр.

3.32. Если куб преобразовать подобно, выбрав в качестве центра подобия точку O , то диагональ, проходящая через точку O , сохранит свое направление в пространстве.

3.33. Составным элементом этой задачи является соотношение, связывающее разность углов треугольника, прилежащих к некоторой его стороне, с углом между этой стороной и биссектрисой противоположного угла.

3.34. Диагонали, расстояние между которыми нужно найти, будут лежать на скрещивающихся прямых. Расстояние между

скрещивающимися прямыми равно расстоянию между определяемыми ими параллельными плоскостями.

3.35. Так как сфера с центром в точке O расположена симметрично относительно всех трех ребер, выходящих из A , то O должна лежать на диагонали куба.

3.36. Два противоположных ребра тетраэдра лежат на скрещивающихся прямых. Расстояние между этими скрещивающимися прямыми измеряется отрезком, соединяющим середины ребер (рис. 1.3.36). Этот же отрезок будет высотой цилиндра.

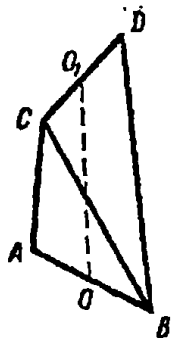


Рис. 1.3.36.

3.37. Задачу можно свести к такой: доказать, что объем конуса меньше куба его образующей. ↓

3.38. Чтобы решить задачу, нужно ввести линейные элементы, характеризующие конус, например, высоту H и радиус основания r . Затем выразить через радиусы шаров H , ρ и ρ .

3.39. Чтобы использовать данное в условии отношение объемов двух конусов, нужно выразить радиус основания одного конуса через радиус основания другого. Для этого придется вписать конус, свободно вращающийся в шаре, закрепить, чтобы возникли подобные треугольники.

3.40. Записать выражение для боковой поверхности конуса и приравнять его $\pi \sqrt{2}$. Это позволит найти радиус основания конуса.

3.41. Центры четырех шаров, касающихся основания конуса, лежат в одной плоскости (рис. 1.3.41). Если мы проведем осевое сечение конуса через O_1 и O_3 , то сможем связать высоту H и радиус основания R конуса с радиусом r .

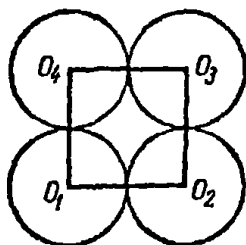


Рис. 1.3.41.

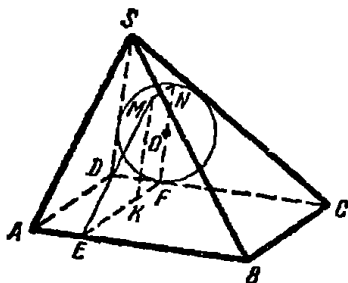


Рис. 1.3.42.

3.42. Необходимые построения показаны на рис. 1.3.42. Плоскость $EMNF$ проходит через ось цилиндра и перпендикулярна к основанию пирамиды; F —точка касания окружности основания цилиндра со стороной DC ; M —точка касания с гранью ASB . Отрезки MK и EF взаимно перпендикулярны, KF —искомая величина.

3.43. Условия задачи отражены на рис. 1.3.43. Ввести линейные элементы, определяющие конус, и выразить их через ребро куба.

3.44. Поскольку в усеченную пирамиду вписан шар, то объем пирамиды можно представить в виде произведения одной трети

радиуса шара на полную поверхность пирамиды. Обозначим стороны нижнего и верхнего оснований через a и b соответственно. Воспользовавшись сравнением объемов, — в качестве второго выражения для

объема нужно взять обычную формулу $V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$. —

выразим площадь боковой грани пирамиды через a и b .

3.45. Нет необходимости изображать сами шары. Достаточно изобразить их центры и точки их касания с плоскостью.

3.46. Фигуры, о которых говорится в условии задачи, расположены так, что у них имеются две плоскости симметрии. Первая плоскость симметрии пройдет через ребро данного двугранного угла и через центр меньшего шара. На этой плоскости окажутся центры двух других шаров. Вторая плоскость симметрии будет перпендикулярна к ребру двугранного угла и тоже пройдет через центр меньшего шара. Поэтому достаточно сделать каркасный чертеж, на котором изобразить лишь одну из четырех равных частей данной конфигурации.

3.47. У рассматриваемой фигуры будут три плоскости симметрии, проходящие через ось конуса и центр одного из шаров. Проекция центров трех шаров на плоскость P образуют равносторонний треугольник, сторона которого равна $2R$. Сделать каркасный чертеж.

3.48. Чтобы использовать условие задачи, нужно рассмотреть два соседних конуса. При этом нет необходимости рисовать их целиком, достаточно изобразить оси, общую образующую и образующие, по которым конусы касаются плоскости.

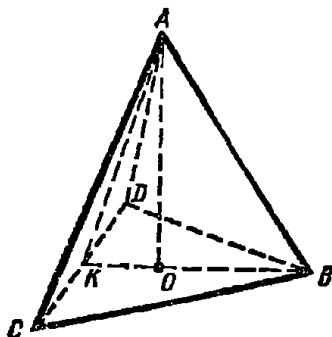


Рис. 1.3.49.

3.49. По условию, сфера, радиус которой нужно найти, вписана в трехгранный угол A (рис. 1.3.49). Это означает, что ее центр лежит на высоте AO . Однако все точки высоты AO (кроме концов) лежат внутри сферы, построенной на AB . Следовательно, касание двух сфер может быть только внутренним.

3.50. Искомое тело можно представить себе как часть пространства, заполненную в результате вращения вокруг оси PP (рис. 1.3.50) треугольника SAB и всех сечений пирамиды, проходящих через вершину S параллельно AB . Таким сечением является, например, треугольник SEF , изображенный на рис. 1.3.50.

4.1. Построение сечения, о котором идет речь в задаче, показано на рис. 1.4.1. Вначале найдена точка F сечения, лежащая в плоскости нижнего основания на пересечении прямых AE и DC .

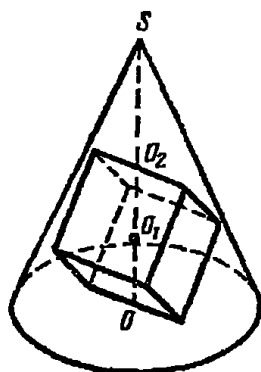


Рис. 1.3.43.

4.2. Построение сечения показано на рис. 1.4.2, который подсказывает и рациональный способ вычисления площади сечения.

4.3. Чтобы построить сечение, проведите прямую через вершину A и центр верхнего основания и найдите точку пересечения этой прямой с ребром CC_1 .

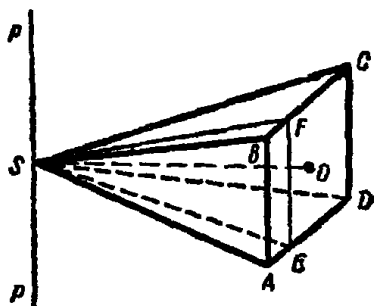


Рис. 1.3.50.

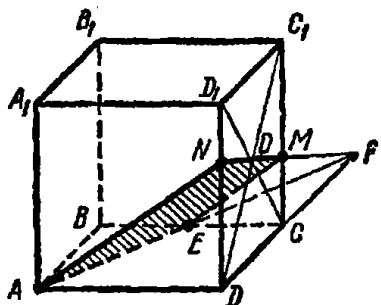


Рис. 1.4.1.

4.4. Сечение $BEFG$ (рис. 1.4.4) разбивает пирамиду на две части. Удобнее найти объем той части пирамиды, которая лежит под сечением, представив эту фигуру в виде разности двух пирамид $EBCM$ и $FGDM$.

4.5. Сечение должно пройти через точки A , D и N (рис. 1.4.5). Если соединить их, то получим пирамиду $NACD$, которую сечение отрезает от половины данной пирамиды.

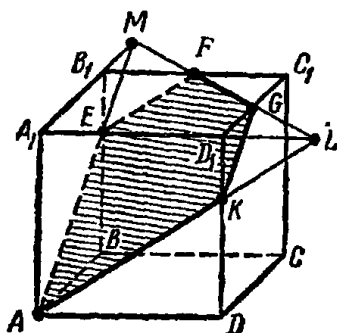


Рис. 1.4.2.

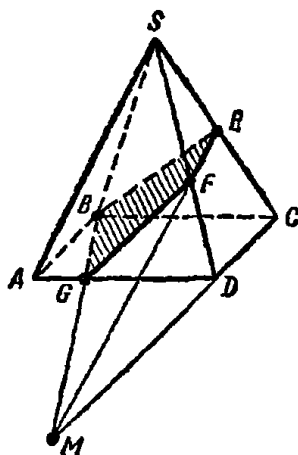


Рис. 1.4.4.

4.6. Основную трудность в этой задаче представляет построение сечения. Начните с построения вспомогательного треугольника PQR .

4.7. Связать сечение с перпендикулярной к нему плоскостью центрального сечения пирамиды.

4.8. Чтобы вычислить площадь треугольника AEB , достаточно найти его высоту EM (рис. 1.4.8). Высоту B_1O призмы нетрудно вычислить, а высота EK пирамиды $EABC$ в два раза меньше B_1O .

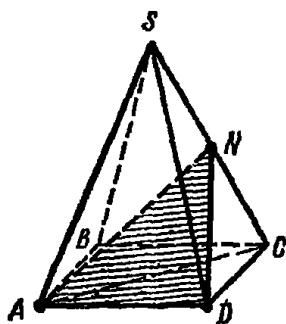


Рис. 1.4.5.

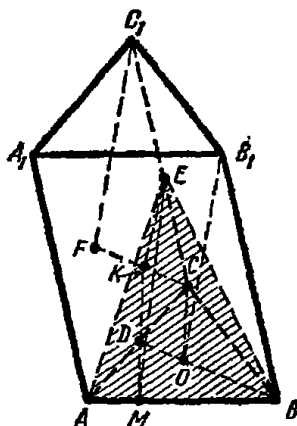


Рис. 1.4.8.

4.9. Чтобы построить сечение, достаточно провести через точку F два отрезка, лежащих внутри данного параллелепипеда: один в одной диагональной плоскости параллельно BD , а второй—в другой диагональной плоскости параллельно AC_1 .

4.10. Построение тени, отбрасываемой кубом, показано на рис. 1.4.10. Посмотрите, как будет изменяться тень при вращении источника света.

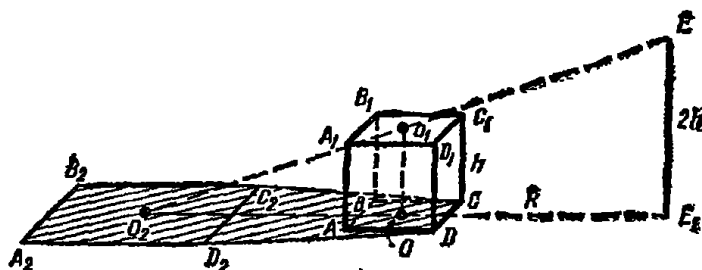


Рис. 1.4.10.

5.1. Если точка M принадлежит геометрическому месту точек, то отрезок NO виден из нее под прямым углом. ↓

5.2. Если к треугольнику AMB применить теорему косинусов, то получим еще одно соотношение, связывающее угол AMB со сторонами треугольника.

5.3. Поскольку характеристики геометрического места точек содержатся в условии задачи, вполне удобно доказать, что любая

точка окружности обладает указанным свойством. Для этого следует применить теорему косинусов к стороне MB треугольника AMB .

5.4. При любом выборе точки M треугольники AMB и $BM\bar{C}$ имеют общую сторону BM . Использовать условие равновеликости двух треугольников, имеющих общую сторону.

5.5. Пусть точка M зафиксирована. Площадь треугольника ABM не изменится, если отрезок AB двигать по прямой AB . То же самое можно сказать о треугольнике CDM . Остается рассмотреть два случая: 1) прямые AB и CD пересекаются, 2) прямые AB и CD параллельны.

5.6. Выясните, какую роль играет в задаче куб. Задачу можно расчлениить на две: вначале решить ту же задачу для прямых, на которых расположены диагонали куба, а затем высечь часть пространства, ограниченную кубом, и проследить, какие при этом произойдут изменения.

6.1. Представить $p^3 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

6.2. Первый способ. Воспользоваться методом математической индукции. ↓

Второй способ. Разбить все числа на классы по модулю 3:

$$n = 3k, \quad n = 3k + 1, \quad n = 3k - 1,$$

и проверить утверждение для каждого класса. ↓

6.3. Поскольку $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, то $a^{105} = (a^3)^{35} = (a^5)^{21} = (a^7)^{15}$. Воспользуйтесь этим для разложения данного числа на множители.

6.4. Среди чисел от 1 до 500 будет 250 четных, 125 делящихся на 4 и т. д.

6.5. Чтобы данное число приняло более симметричный вид, его удобно умножить на 10. При этом делимость его на 81 не изменится.

6.6. Дополнить выражение $n^4 + 4$ до полного квадрата и разложить на множители.

6.7. Так как в условии сказано, что n четное, то нужно сделать подстановку $n = 2k$ и привести данное выражение к общему знаменателю.

6.8. Первый способ. Дробь $\frac{2x+3}{5x+7}$ сократима тогда и только тогда, если ее числитель представим в виде pr , а знаменатель — в виде qr , где p , q и r — целые числа и $r \neq \pm 1$.

Второй способ. Если сократима дробь p/q , то сократима и дробь q/p .

6.9. Использовать сначала признак делимости на 4, а затем признак делимости на 9. ↓

6.10. Если условие, в силу которого число $\overline{2abc}$ в три раза меньше $\overline{abc1}$, записать символически, то получим уравнение, которое нужно будет решить в целых числах, каждое из которых расположено между 0 и 9.

7.1. Обе двойки представить как $3 - 1$ и сгруппировать члены так, чтобы в числителе можно было вынести за скобки $n + 1$, а в знаменателе $n - 1$.

7.2. Прежде чем выполнять действия в скобках, следует упростить дроби, разложив числители и знаменатели на множители.

7.3. Перед нами сумма из трех слагаемых. Если первые два привести к общему знаменателю, то в числителе произойдут существенные упрощения.

7.4. Прежде чем производить вычитание, следует упростить дробь.

7.5. Если вынести за скобки $x^{\frac{3}{m}}$, то в скобках останется x в степени, содержащей множителями $m-n$ и $\frac{1}{mn}$. Это упростит дальнейшие преобразования. ↓

7.6. Каждое из подкоренных выражений является полным квадратом.

7.7. Обратит внимание на то, что

$$9+4\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}+1=(2\sqrt{2}+1)^2.$$

7.8. Каждую из вторых скобок разбить на два слагаемых x^2-u^2 и z^2-y^2 , после чего собрать все члены, содержащие множитель x^2-u^2 , и все члены, содержащие z^2-y^2 . ↓

7.9. Возвести $x+y$ в четвертую степень и вынести коэффициент 2 за скобки. Выражение в скобках представить в виде суммы одночленов, взятых с коэффициентом единица, т. е. вместо $2x^3y$ написать x^3y+x^3y и т. п.

7.10. Первый способ. Если рассматривать данное выражение как многочлен относительно x , то при $x=y$ и при $x=z$ оно обращается в нуль, т. е. этот многочлен должен делиться на $x-y$ и $x-z$.

Второй способ. Удобно обозначить: $y-z=a$, $z-x=b$, $x-y=c$. Заметим, что $a+b+c=0$.

7.11. Если обозначить левую часть через z , то, освобождаясь от радикалов, можно получить уравнение относительно z .

7.12. Равенство, которое нужно доказать, представляет собой однородное выражение седьмой степени. Возвести в степень $a+b+c=0$ и $a+b=-c$.

7.13. Задача сводится к разбору случаев, позволяющих раскрыть знаки абсолютной величины. Количество рассматриваемых случаев можно уменьшить, если заметить, что равенство, о котором идет речь, не меняется при замене x на $-x$.

7.14. Можно разобрать различные случаи взаимного расположения чисел x , y и 0. Однако проще возвести каждую часть в квадрат. Так как обе части неотрицательны, то мы получим равенство, равносильное данному. ↓

8.1. Поскольку выражения, стоящие в скобках, расположены симметрично относительно значения $x=5$, удобно ввести новое неизвестное $y=x-5$. После того как мы раскроем скобки, произойдут значительные упрощения. ↓

8.2. Можно перемножить скобки по две, чтобы получить квадратные трехчлены, отличающиеся только свободным членом.

8.3. Если записать уравнение в виде

$$x^2-17=3y^2,$$

то возникает мысль доказать, что левая часть ни при каких целых x не делится на 3.

8.4. Если целое y зафиксировать, то получим квадратное уравнение относительно x . Поэтому естественно обратить внимание на те ограничения, которые накладывает на y условие неотрицательности дискриминанта этого уравнения. ↓

8.5. Остаток следует искать в виде $ax+b$, а частное удобно обозначить через $Q(x)$. Следуя определению деления, записать тождество.

8.6. Противоречие между тем, что неизвестных в задаче два a и b , а данный корень один, становится кажущимся, если обратить внимание на то, что a и b — целые, а данный корень состоит из рационального и иррационального числа. Кроме того, все иррациональности, получающиеся при возведении этого корня во вторую и в третью степень, соизмеримы.

8.7. Если подставить известный корень в уравнение, найти коэффициенты при рациональной и иррациональной частях, то получим систему двух уравнений для определения a и b .

8.8. Ответьте на вопрос: достаточно ли воспользоваться теоремой Виета, в силу которой свободный член и второй коэффициент должны быть положительными?

8.9. Если обозначить первый корень через x_1 , а знаменатель прогрессии через q , то останется применить теорему Виета. ↓

8.10. С помощью теоремы Виета получить зависимость между $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и коэффициентами данного уравнения. ↓

8.11. Разделить x^3+ax+1 на $x-\alpha$ по правилу деления многочлена на двучлен.

8.12. Ясно, что остаток нужно искать в виде $ax+b$. Если данный многочлен обозначить через $P(x)$, а частное от его деления на $(x-2)(x-3)$ — через $Q(x)$, то мы сможем воспользоваться определением деления многочленов.

8.13. Если многочлен x^4+1 разделится на x^2+px+q , то в частном мы получим многочлен второй степени, т. е. x^2+ax+b .

8.14. Если данный многочлен делится на $(x-1)^3$, то после замены $x-1=y$ получим многочлен, который должен делиться на y^3 .

8.15. Многочлен делится на x^2+x+1 , если его корнями являются комплексно сопряженные числа $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8.16. Если многочлен четвертой степени с коэффициентом 6 при старшем члене делится на x^2-x+q без остатка, то в частном обязательно получится многочлен $6x^2+ax+b$, в котором a и b определяются одновременно с p и q .

9.1. Точки $-2, -1, 0$ делят числовую ось на четыре интервала, в каждом из которых нужно решить данное уравнение. ↓

9.2. Если рассматривать значения x , обращающие в нуль числа, стоящие под знаками абсолютных величин, то придется разбить числовую ось на пять частей.

Удобнее ввести новое неизвестное $y=x^2$. ↓

9.3. Это уравнение четвертой степени. Следовательно, нужно найти искусственный прием, приводящий к его решению. Удобно воспользоваться тем, что слева стоит сумма квадратов.

9.4. Возвести в куб и сравнить полученное уравнение с данным.

9.5. Свести уравнение к симметрической системе, обозначив первый корень через u , а второй — через v . ↓

9.6. Если под знаками корней раскрыть скобки, то получим квадратные трехчлены, отличающиеся лишь свободным членом. Поэтому удобно заменить уравнение системой, обозначив первый корень через u , а второй — через v .

9.7. Поскольку неизвестное входит в уравнение либо в сочетании $x-b$, либо в сочетании $a-x$, то удобно ввести обозначения $\sqrt[4]{a-x}=u$, $\sqrt[4]{x-b}=v$ и получить систему алгебраических уравнений.

9.8. Ввести вспомогательное неизвестное y и свести решение данного уравнения к решению системы уравнений относительно x и y .

9.9. Перенести $\sqrt{|x|}$ в правую часть уравнения и возвести обе части в квадрат.

9.10. Чтобы избавиться от знаков абсолютной величины, можно поступить двояко: либо потребовать, чтобы правая часть уравнения была неотрицательной, и решить уравнения

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = -x^2 - 4x + \beta, \quad x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = x^2 + 4x - \beta;$$

либо рассмотреть два случая: в первом выражение, стоящее под знаком абсолютной величины, неотрицательно, а во втором — отрицательно.

9.11. Рассмотреть различные случаи расположения x и y по отношению к нулю (все же придется рассмотреть четыре случая). ↓

9.12. Решить систему уравнений с параметром k , а затем решить систему неравенств. ↓

9.13. Рассмотреть различные случаи взаимного расположения чисел x и y и чисел x и $-y$. Это позволит раскрыть знаки абсолютной величины. ↓

9.14. Второе уравнение — уравнение окружности радиуса $\sqrt{a}$. Нарисовать кривую, которая определяется первым уравнением.

9.15. Одно решение очевидно: $x=y=0$. Если $xy \neq 0$, то можно разделить первое уравнение на xy , а второе на x^2y^2 .

9.16. Если бы во втором и третьем уравнениях не было коэффициентов 2 и 3, то уравнения системы получались бы друг из друга с помощью циклической перестановки неизвестных x , y и z . Однако влияние коэффициентов оказывается столь сильным, что попытка использовать это свойство системы не приводит к успеху. Попробуйте преобразовать систему в распадающуюся, для чего потребуются отыскать алгебраическое выражение, общее для двух уравнений, и исключить его.

9.17. Если первое уравнение записать в виде $x + \sqrt{y} = -z$ и возвести в квадрат, то с помощью второго уравнения системы можно найти xy .

9.18. Сопоставьте первое и последнее уравнения. Если записать их в виде

$$x + y = 1 - z, \quad x^3 + y^3 = 1 - z^3,$$

то напрашивается способ, с помощью которого можно преобразовать систему в распадающуюся.

9.19. Левые части уравнений — многочлены, симметричные относительно x и y . Мы знаем, что каждый такой многочлен можно выразить через простейшие многочлены $x+y$ и xy . Первый из них равен a , а второй можно найти из первых двух уравнений.

9.20. Первые два уравнения системы симметричны относительно x и y . Нужно использовать эту симметрию для того, чтобы получить одинаковые правые части у этих двух уравнений.

9.21. Если второе уравнение возвести в квадрат, то можно сравнить два выражения для $(x+y)^2$. ↓

9.22. В первое уравнение входит y , в последующие yt , yt^2 и yt^3 соответственно. Эта закономерность позволяет исключить y .

9.23. Каждый элемент, стоящий в левой части второго уравнения, получается из соответствующего элемента, стоящего в левой части первого уравнения, возведением в квадрат. Нужно использовать это свойство системы.

9.24. Левые части всех трех уравнений симметричны относительно x , y , z . Поэтому, подвергнув какому-то преобразованию любые два уравнения системы, разумно сделать то же самое и с оставшимися двумя парами уравнений.

9.25. Если известна сумма $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, то из каждого уравнения можно найти соответствующее x_i .

9.26. Чтобы избежать возведения двучлена в третью и, тем более, в пятую степень, нужно ввести новые неизвестные так, чтобы выражение $7x - 11y$ было одним из этих неизвестных.

9.27. Поскольку $\sqrt{y-x}$ входит в оба уравнения с разными знаками, а $\sqrt{y}$ — с одинаковыми, то естественно сложить данные уравнения и вычесть. При этом мы приходим к системе, у которой слева стоят сумма и разность одинаковых радикалов, а справа — разные радикалы.

9.28. Чтобы левые части уравнений стали однородными относительно неизвестных, удобно ввести новое неизвестное $z = \sqrt{y}$.

9.29. Если каждое из уравнений возвести в квадрат, то получим систему относительно $u = x^2$ и $v = y^2$. Проверка здесь может оказаться довольно сложной, поэтому целесообразно следить за равносильностью в процессе решения. Чтобы в результате возведения в квадрат не появились посторонние решения, достаточно записать ограничения: $x > 0$, $y > 0$.

9.30. Все члены системы, содержащие x и y , однородны второй степени относительно x и y . Пусть данная система имеет решения x_1 , y_1 , z_1 . Укажите симметричное решение, которое наряду с этим будет иметь система.

9.31. Поскольку вместе с условием $x+y=0$ мы получаем три уравнения с двумя неизвестными, то имеет смысл воспользоваться подстановкой $y = -x$.

9.32. Поскольку данная система должна иметь решение при любом b , то, чтобы сузить область допустимых значений a , можно рассмотреть эту систему при некотором фиксированном b .

9.33. Вначале нужно использовать условие, что система должна иметь *только* одно решение. Если каждое уравнение рассматривать как функцию x , то легко заметить, что обе функции четные. Это

значит, что наряду с решением $x=x_1$, $y=y_1$ система имеет решение $x=-x_1$, $y=y_1$.

9.34. Второе уравнение можно преобразовать к виду

$$x + y(\sqrt{x^2 + 1} - x) + y^2 = 0,$$

умножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю. Легко убедиться, что $y \neq 0$. Поэтому можно полученное уравнение разделить на y , после чего нетрудно с помощью первого уравнения системы исключить $\sqrt{x^2 + 1}$.

10.1. Из условия $a+b=2$ следует, что числа a и b расположены симметрично относительно единицы. Использовать этот факт.

10.2. Первый способ. Так как $x^2 + y^2 = 1$, то существует угол α такой, что $x = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$.

Второй способ. Воспользуйтесь очевидным неравенством $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

10.3. Первый способ. Поделить данное равенство почленно на $c^{1/3}$.

Второй способ. Доказать эквивалентное неравенство:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{2/3} + \left(\frac{b}{c}\right)^{2/3} > 1.$$

10.4. Избавиться от дробей и использовать условие $0 \leq x \leq 1$. Это условие обеспечивает выполнение таких неравенств, как $x^{k+1} \leq x^k$, $1 - x^k \geq 0$ при любом натуральном k . ↓

10.5. Оценить каждый корень с помощью неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим двух чисел, взяв в качестве первого числа подкоренное выражение, а в качестве второго — единицу.

10.6. Предположить, что $b \leq a$, и оценить левую часть, заменив b на a . ↓

10.7. Выражения, стоящие в правой и левой частях неравенства, однородны относительно a и b . Поэтому естественно выразить их через $\frac{a}{b}$, если $a \leq b$, или через $\frac{b}{a}$, если $a > b$.

10.8. Воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел.

10.9. Первый способ. Если обозначить три положительных слагаемых в левой части неравенства через u , v и w , то $uvw=1$. Следовательно, среди чисел u , v и w есть одно большее единицы и одно меньшее единицы, например, $u > 1$, $v < 1$. Тогда $(1-u)(v-1) > 0$.

Второй способ. Если u , v и w — положительные числа, причем w — наименьшее, то $u > w$, $v > w$. Неравенство $v > w$ можно умножить на положительное число $u-w$ и полученное неравенство разделить почленно на uvw .

10.10. Поскольку, раскрыв скобки в правой и левой частях неравенства, мы его существенно упростим, удобно вести доказательство от противного.

10.11. Если перемножить крайние и средние скобки, то получатся два трехчлена отличающихся только свободным членом. Это

позволяет оценить левую часть, выделив квадрат трехчлена, свободный член которого находится посередине между свободными членами первого и второго трехчленов. ↓

10.12. Данные уравнения симметричны относительно y и z и не симметричны (второе) относительно x . Если воспользоваться вторым уравнением и из первого выразить $y+z$ через x , то мы получим простую систему относительно y и z , где x выступает в роли свободного члена.

10.13. Данные уравнения можно переписать в виде

$$y+z=5-x, \quad yz+x(z+y)=8,$$

после чего можно получить уравнение, корнями которого будут y и z , а коэффициенты будут зависеть от x .

10.14. Нужно рассмотреть три случая, в зависимости от того, положителен, отрицателен или равен нулю дискриминант трехчлена. Затем обратить внимание на знак старшего коэффициента. ↓

10.15. Так как коэффициент при x^2 положителен, то ветви параболы направлены вверх. Рассмотреть возможное расположение корней параболы относительно отрезка $1 < x < 2$.

10.16. Воспользоваться теоремой Виета и рассмотреть случаи, когда x_1 и x_2 одного знака и разных знаков.

10.17. Определить направление ветвей параболы и расположение ее корней относительно точек -1 и $+1$, чтобы условия задачи выполнялись.

10.18. Если $m \neq 0$ (случай $m=0$ следует рассмотреть отдельно), то ветви параболы $y=mx^2-4x+3m+1$ должны быть направлены вверх.

10.19. Рассмотреть случаи, позволяющие раскрыть знаки абсолютной величины. Удобнее записать это неравенство как совокупность двух систем: в первой выражение, стоящее под знаком абсолютной величины, неотрицательно, а во второй системе оно отрицательно. ↓

10.20. Чтобы избавиться от знаков абсолютных величин, достаточно вспомнить о том, как они могли быть получены, например, $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$. ↓

10.21. Чтобы упростить данное неравенство, его нужно умножить на $4x$. Поскольку результат будет зависеть от знака x , необходимо рассмотреть два случая: $x < 0$ и $x > 0$. ↓

10.22. Если перенести 3 в левую часть неравенства и привести полученное выражение к общему знаменателю, то получим дробь, которая должна быть отрицательной.

10.23. Неравенство можно упростить, если перенести все в одну сторону, привести выражения, стоящие под радикалами, к общему знаменателю и вынести за скобки неотрицательный множитель

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

10.24. Удобно рассмотреть два случая: $x > 0$ и $x < 0$ (при $x=0$ сразу видно, что неравенство не выполняется).

10.25. В неравенство входит сумма двух выражений: $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+7}$ и их удвоенное произведение. Кроме этого, в правой

части стоит член $-2x$, который после перенесения его в левую часть можно использовать для образования суммы квадратов этих выражений.

10.26. Поскольку второе слагаемое всегда неотрицательно, целесообразно рассмотреть два случая: $x > 0$ и $x \leq 0$.

10.27. Если привести обе части неравенства к основанию 2, то можно заметить симметрию показателей.

10.28. Если перенести все влево и сгруппировать члены, содержащие иррациональное выражение в показателе степени, то это поможет разложить левую часть на множители. ↓

10.29. Чтобы степень была меньше единицы, необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий: либо основание больше единицы и показатель степени отрицателен, либо положительное основание меньше единицы, а показатель положителен.

10.30. Воспользоваться свойством показательной функции с основанием, меньшим единицы.

10.31. Так как обязательно $x > 0$, то можно упростить неравенство, разделив обе части на x .

10.32. Прологарифмировать по основанию 10.

10.33. При возведении в квадрат нужно потребовать, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным. ↓

10.34. Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть *положительным*. Выражение, заключенное в знаках абсолютной величины, *неотрицательно*. Как видите, это не совсем одно и то же. ↓

10.35. Перейти к одному основанию логарифмов и выразить левую часть через $\log_a x$. Нарушится ли при этом равносильность?

10.36. Перейти к одному основанию и получить под знаками логарифма одинаковое число. ↓

10.37. Основание логарифмов меньше единицы. При переходе к неравенству, связывающему аргументы, нужно не забыть о положительности величин, стоящих под знаками логарифма.

10.38. Если обозначить $\log_a x = y$, то получим алгебраическое неравенство относительно y .

10.39. Перейти к общему основанию k .

10.40. Вообще говоря, нужно рассмотреть случаи, когда основание x больше единицы и когда оно находится между нулем и единицей. Однако внимательное изучение условия неравенства позволяет рассмотреть только один из этих случаев.

10.41. Поскольку основание логарифма больше единицы, данное неравенство эквивалентно требованию, чтобы число, стоящее под знаком логарифма, было не меньше единицы.

10.42. Прежде, чем рассматривать случаи $x^2 > 1$ и $0 < x^2 < 1$, нужно полностью использовать условие.

10.43. Перейти к основанию 2 и обозначить $\log_2 x = y$. ↓

10.44. Нужно начать с приведения логарифмов к основаниям 2 и 3.

10.45. Поскольку неизвестно, как расположено выражение, стоящее в основании логарифма, относительно 1, то придется рассмотреть два случая: $0 < x^2 - 1 < 1$ и $x^2 - 1 > 1$. ↓

10.46. Преобразовать выражение $\log_{1/2}^2 \frac{x^5}{4}$ с тем, чтобы в нем не было дробей ни в основании, ни под знаком логарифма. ↓

10.47. Если $y \neq 0$ фиксировано, то данное неравенство является обычным квадратным неравенством относительно x . Остается записать условие, при котором это квадратное неравенство имеет решение.

11.1. С помощью формулы перехода к другому основанию можно выразить искомое число через десятичные логарифмы.

11.2. Число 1225 нужно разложить на простые множители. ↓

11.3. Перенести степени с основанием 2 в правую часть уравнения, а с основанием 3 — в левую. Правую часть записать как 2 в некоторой степени, а левую — как степень числа 3.

11.4. Обозначить $3^{-|x-2|} = y$ и исследовать квадратное уравнение.

11.5. Обозначить $12^{|x|} = y$. При исследовании учесть, что не только дискриминант не должен быть отрицательным, но и найденные значения y не могут быть меньше единицы. ↓

11.6. Уравнение можно переписать в виде

$$5x \cdot \frac{3x}{2^{x+1}} = 5^2 \cdot 2^4;$$

это позволяет угадать одно решение. Такую возможность упускать не следует.

11.7. Использовать тот факт, что числа $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$ взаимно обратны.

11.8. Уравнение примет более симметричный вид, если разделить обе его части на 2^x .

11.9. Для решения уравнения нужно перейти к общему основанию логарифмов. Здесь удобнее выбрать в качестве основания двойку.

11.10. Привести к одинаковому числу под знаком логарифма.

11.11. С помощью формулы $\log_a b = \log_a b^k$ можно добиться того, что в уравнение будут входить только $\log_x 7$ и $\log_7 x$.

11.12. Если уравнение прологарифмировать по основанию 3, то мы получим уравнение третьей степени относительно $\log_3 x$. ↓

11.13. Уравнение легко преобразовать в иррациональное с помощью замены $y = \log_x 3$. ↓

11.14. Так как $2 \log_x 2 = \log_x 4$, то после умножения обеих частей уравнения на $\log_4 x$ оно упростится. Нарушится ли при этом равносильность?

11.15. Вид уравнения подсказывает, что для его решения удобно перейти к логарифмам с общим основанием x . Равносильное ли получится уравнение?

11.16. В уравнение входят логарифмы выражения $3+x$ при разных основаниях. Его можно упростить, если воспользоваться формулой

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_a c}{\log_b c}.$$

11.17. При решении удобнее следить за равносильностью, чем делать в конце проверку, которая окажется здесь достаточно громоздкой.

11.18. Если $\log_{\sqrt{b}} x$ записать при основании a , то уравнение упростится.

11.19. Если в каждом из подкоренных выражений произвести логарифмирование с переходом к общему основанию a , то это позволит выделить под корнями полные квадраты. Очевидно, такие же ограничения, как на a , должны быть наложены и на x .

11.20. Система не может иметь решений, в которых хотя бы одно неизвестное обращается в нуль (докажите). Следовательно, каждое уравнение можно прологарифмировать.

11.21. Поскольку нам известно, чему равно x^y , то второе уравнение целесообразно возвести в степень y .

11.22. Из вида системы следует, что x и y положительны. Так как в левых частях уравнений одинаковые показатели степени, то целесообразно попытаться их найти.

11.23. Так как $11^{xz} : 11^z = 11^{(x-1)z}$, то с помощью этого соотношения можно получить уравнение относительно $5^{y/2}$.

11.24. Так как коэффициенты в левых частях уравнений одинаковы (двойку во втором уравнении можно перебросить в показатель степени), то целесообразно посмотреть, нет ли у левых частей общего множителя.

11.25. Вначале нужно перейти к общему основанию у логарифмов, а затем получить систему двух алгебраических уравнений.

11.26. Систему можно решить подстановкой, выразив из второго уравнения y через x .

11.27. Решение системы нужно начать с использования условий, что позволит сократить число рассматриваемых случаев.

Из второго уравнения следует, что x и y — величины одного знака. Поскольку должен существовать $\log_2(x+y)$, то x и y положительны.

Сумму $x+y$ легко сравнить с единицей.

11.28. Это — алгебраическая система относительно $u = \log_2 x$ и $v = \log_2(y+1)$. ↓

11.29. Оба уравнения можно упростить с помощью формулы

$$\log_{a^k} N = \frac{1}{k} \log_a N \quad (a > 0, a \neq 1).$$

11.30. Первые два уравнения можно решить как систему относительно соответствующих степеней тройки. Нетрудно заметить, что это позволит найти x .

12.1. Выражения, стоящие в квадратных скобках, существенно упростятся, если раскрыть скобки и выполнить возведение в степень. ↓

12.2. Это тождество по структуре похоже на формулу тангенса суммы. Чтобы заметить это, достаточно переписать его так:

$$\operatorname{tg} 2\alpha [\operatorname{tg} (30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha)] = 1 - \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha) \operatorname{tg} (30^\circ - \alpha).$$

12.3. Перенести $\operatorname{ctg} x$ в левую часть и преобразовать вместе с $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

12.4. Поскольку нам нужно получить соотношение, в котором участвуют $\alpha + \beta$ и α , то вместо $\sin \beta$ удобно записать $\sin [(\alpha + \beta) - \alpha]$ и воспользоваться формулой синуса разности. ↓

12.5. Домножить и разделить на $2 \sin \frac{\pi}{7}$ и воспользоваться формулой синуса двойного угла. ↓

12.6. Вычислить произведение косинусов этих углов можно, если домножить и разделить его на $2 \sin \frac{\pi}{7}$. После этого нужно трижды последовательно воспользоваться формулой синуса двойного угла (см. задачу 12.5).

12.7. Удобнее доказать, что правая часть равна левой. Для этого стоящее в правой части выражение нужно преобразовать с учетом данных равенств.

12.8. В произведении $\sin(x+y) \sin(x-y)$ удобно раскрыть синус суммы и синус разности.

12.9. Выразить дробь, стоящую в правой части последнего равенства, через синусы и косинусы α и β .

12.10. Данное выражение и выражение, которое нужно вычислить, симметричны относительно α , β и γ . Так как углы α , β и γ произвольны и независимы, то удобно записать оба выражения с помощью одинаковых тригонометрических функций этих углов.

12.11. Подставить $\beta = \alpha + \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \alpha + \frac{2\pi}{3}$ и записать данное выражение через синусы и косинусы.

12.12. Так как $\operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \beta$ и $\operatorname{ctg} \gamma$ образуют арифметическую прогрессию, то $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma = 2 \operatorname{ctg} \beta$. Если теперь вспомнить, что $\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma)$, то можно получить соотношение, не зависящее от $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma$. ↓

13.1. Множитель $\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ нужно заменить на $\sin x + \cos x$.

13.2. Левую часть можно преобразовать так, чтобы она содержала множителем выражение, стоящее в правой части.

13.3. Выразить левую часть уравнения через $\sin x$ и $\cos x$ так, чтобы оказалось возможным разложение ее на множители.

13.4. Если преобразовать в сумму произведение синусов двух функций и произведение косинусов этих же функций, то получим сопряженные выражения. Поэтому целесообразно заменить тангенсы через синусы и косинусы соответствующих аргументов.

13.5. Если записать $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ вместо $\operatorname{ctg} x$, то после простых преобразований (следите за их равносильностью) придем к распадающемуся уравнению.

13.6. Прибавить к левой и правой частям уравнения $\operatorname{tg} 3x$. Тогда слева можно вынести за скобки число 3, а справа $\operatorname{tg} 3x$.

13.7. Нетрудно заметить, что множитель $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ можно вынести в левой части уравнения за скобки, так как он получается при преобразовании суммы $\sin x + \cos x$ в произведение.

13.8. Перенести $\lg 2x$ в правую часть и привести обе части уравнения к виду, удобному для логарифмирования.

13.9. Избавиться от иррациональностей с помощью перехода под радикалами к функциям половинного аргумента. Использовать условие, что $0 < x < 2\pi$, и постараться раскрыть знаки абсолютной величины.

13.10. Перенести $\sin \alpha$ в левую часть и привести полученную сумму к виду, удобному для логарифмирования. Стоящий в правой части $\sin x$ выразить через функции половинного аргумента.

13.11. Рассмотреть случаи, позволяющие раскрыть знаки абсолютной величины; задача сведется к решению двух уравнений и к выбору тех значений x , которые попадают в указанный интервал.

13.12. Вначале следует посмотреть, не стоит ли под знаком корня полный квадрат какого-то выражения. Число 16 нам, скорее всего, не мешает, а вот 17—менее удобно для последующих преобразований. Чтобы освободиться от его присутствия, удобно вынести под радикалом $\sec^2 x$ за скобки, а оставшееся в скобках выражение записать через $\sin x$.

13.13. Перенести все члены уравнения в левую часть и разложить на множители с тем, чтобы появилась возможность избавиться от большинства радикалов.

13.14. Выразить $\sin 4x$ через $\lg 2x$. Это тождество условное, поэтому нужно убедиться в равносильности полученного уравнения данному.

13.15. Правую часть уравнения можно сократить на $\cos 2x$, добавив условие $\cos 2x \neq 0$.

13.16. Перейти к функциям x и привести уравнение к однородному, домножив $\sin x$ на тригонометрическую единицу.

13.17. С помощью универсальной подстановки (через тангенс половинного угла) это уравнение может быть сведено к кубичному уравнению относительно $y = \tg \frac{x}{2}$. Равносильное ли получится уравнение?

13.18. Понизить степень.

13.19. Левую и правую части можно привести к виду, удобному для логарифмирования.

13.20. Если каждое из произведений в левой части уравнения преобразовать в сумму, то произойдут упрощения, так как $4x + x = 3x + 2x$.

13.21. Выразить $\sin 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$ и вынести $\sin x$ за скобки из обеих частей уравнения.

13.22. Раскрыть скобки и каждое из ста произведений преобразовать в сумму. ↓

13.23. Каждое произведение преобразовать в разность косинусов. ↓

13.24. Выразить $\cos 4x + 1$ через $\cos 2x$.

13.25. Произведение косинусов может равняться единице, если либо оба косинуса равны единице, либо оба равны минус единице.

13.26. Представить единицу в виде $\sin^2 x + \cos^2 x$.

13.27. Уравнение таково, что не остается надежд на упрощения в результате тригонометрических преобразований. Поэтому следует попытаться воспользоваться оценками. Во-первых, выражение, стоящее в левой части, всегда неотрицательно, кроме того, $\cos^4 x \geq 0$; следовательно, и $\cos 3x \geq 0$. Во-вторых, слева стоит сумма квадратов, которую разумно дополнить до полного квадрата.

13.28. Обратит внимание на то обстоятельство, что левая часть уравнения не может стать меньше единицы, а правая не может превзойти единицу.

13.29. Выражения $\sin x$ и $\sec y$ являются корнями квадратного уравнения, коэффициенты которого могут быть найдены с помощью теоремы Виета.

13.30. Если левую часть второго уравнения преобразовать в сумму косинусов, то мы получим простую линейную систему относительно $\cos(x-y)$ и $\cos(x+y)$. ↓

13.31. Левые части первого и второго уравнений нетрудно выразить через $u = \sin x$ и $v = \sin y$.

13.32. Второе уравнение существенно упростится, если его левую часть преобразовать в сумму.

13.33. Из системы можно исключить x , если воспользоваться основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

13.34. Нужно вначале решить первое уравнение, решение которого находится обычным путем. Найденное значение подставить во второе уравнение.

13.35. Разделив второе уравнение на первое, получим, что $\operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} x$.

13.36. Удобно перейти к уравнениям относительно одной тригонометрической функции. При этом нужно следить за равносильностью.

13.37. Если возвести каждое уравнение в квадрат и полученные уравнения сложить, то мы исключим α . Однако для нас важнее исключить либо x , либо y . Как это сделать?

13.38. Левую часть первого уравнения можно преобразовать в разность $\sin(x-y) - \cos(x+y)$. Из второго уравнения определяется $\cos(x+y)$.

13.39. Правая часть уравнения не может стать больше четырех. Если ввести обозначения $\operatorname{tg}^2 x = u$, $\operatorname{tg}^2 y = v$, то нетрудно заметить, что левая его часть не может стать меньше четырех.

13.40. Первый способ. Умножить $\sin^2 x$ на тригонометрическую единицу $\sin^2 3x + \cos^2 3x$ и сгруппировать члены, содержащие $\sin^2 3x$.

Второй способ. Перенести все члены в левую часть и выделить полный квадрат разности $2 \sin x - \sin^2 3x$. Оставшиеся члены образуют неотрицательное выражение.

13.41. Первый способ. Преобразовать сумму тригонометрических функций $\cos x + \cos y$ в произведение, а $\cos(x+y)$ выразить через косинус половинного аргумента.

Второй способ. Раскрыть $\cos(x+y)$ по формуле косинуса суммы.

13.42. Вопрос задачи естественно поставить следующим образом: при каких a и b равенство

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} (a-x) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} (a-x) = b$$

является тождеством?

13.43. Вначале следует попытаться оценить снизу левую часть уравнения, так как верхняя оценка правой части очевидна:

$$12 + \frac{1}{2} \sin y \leq 12,5.$$

13.44. Перенести $\sin 3x$ в левую часть уравнения и преобразовать $\sin x - \sin 3x$ к виду, удобному для логарифмирования.

14.1. Если обе части неравенства возвести в квадрат, то получим равносильное неравенство. ↓

14.2. Использовать тот же прием, что и при решении уравнения $\cos x - \sin x = -1$, — ввести вспомогательный угол. ↓

14.3. Первый способ. Можно перейти к неравенству относительно $\operatorname{tg} x$. При этом придется рассмотреть различные случаи, в зависимости от знака $\cos x$. ↓

Второй способ. Если синус и косинус выразить через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то получим квадратное неравенство. Равносильно ли оно данному?

Третий способ. Нужно начать с отыскания корней уравнения $\sin x - 3 \cos x = 0$, что удобно сделать с помощью перехода к однородному уравнению относительно $\sin \frac{x}{2}$ и $\cos \frac{x}{2}$.

14.4. Если $\cos 2x$ и $\sin 2x$ выразить через $\operatorname{tg} x$ и обозначить $\operatorname{tg} x = y$, то получится простое алгебраическое неравенство. Равносильно ли оно данному?

14.5. Первый способ. Можно перейти к совокупности двух систем: $\cos x$ и $\operatorname{tg} 2x$ должны быть нестрого (т. е. включая нуль) разных знаков.

Второй способ. Воспользоваться формулой тангенса двойного угла. Равносильное ли получится неравенство?

14.6. Разобрать два случая, позволяющих раскрыть знаки абсолютной величины и решить две получающиеся при этом системы тригонометрических неравенств. ↓

14.7. Если записать $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и перенести все члены неравенства в одну часть, то получим однородное выражение относительно $\sin x$ и $\cos x$. Разделив на $\cos^2 x$, получим алгебраическое неравенство относительно $y = \operatorname{tg} x$. Равносильно ли оно данному? ↓

14.8. Вычислить дискриминант и выяснить, когда он положителен.

14.9. Неравенство может выполняться только при $\sin x \geq 0$ и $\cos x \geq 0$. Приняв во внимание эти ограничения, его можно возвести в квадрат. ↓

14.10. Записать решение неравенства в предположении, что $\frac{1}{1+x^2}$ — новое неизвестное.

14.11. Привести к неравенству относительно одной тригонометрической функции.

14.12. Перенести единицу в левую часть, записать тангенс через синусы и косинусы и выполнить сложение. В числителе появится косинус разности.

14.13. Это — иррациональное неравенство относительно $y = \cos x$. Не следует забывать, что $|y| \leq 1$. Благодаря этому решение можно упростить.

14.14. Если выразить $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то получим алгебраическое неравенство, которое решается методом интервалов. ↓

14.15. Выразить все тригонометрические функции через $\sin \alpha$.

15.1. В правой части можно произвести логарифмирование, не нарушая равносильности.

15.2. Свести к квадратному неравенству относительно $y = \log_{\operatorname{tg} x} 3$. Следить за равносильностью преобразований. ↓

15.3. Нетрудно заметить, что на самом деле интервал можно сузить: $0 < x < \frac{\pi}{2}$, так как при $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ функции, стоящие под знаком логарифма, отрицательны.

15.4. Вначале нужно привести все логарифмы к общему основанию с помощью формулы $\log_{ak} N = \frac{1}{k} \log_a N$.

15.5. Неравенство эквивалентно условию, что основание логарифмов лежит между 0 и 1.

15.6. Начать следует с приведения левой части к виду, удобному для логарифмирования. Это позволит перейти к неравенствам, где уже не будут участвовать тригонометрические функции.

15.7. Использовать тот факт, что $\arccos y \geq 0$. Чему равносильно данное в условии неравенство?

15.8. Область значений левой части неравенства — интервал от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а область значений правой части — интервал от 0 до π . Так как левая часть должна быть больше правой, то аргумент арккосинуса не может стать отрицательным.

16.1. Правая часть уравнения не может стать меньше двух. Сравнить с оценкой левой части. ↓

16.2. Это уравнение легко привести к квадратному относительно $2^{\operatorname{tg}^2 x}$. ↓

16.3. Перейти к общему основанию. Не нарушится ли при этом равносильность?

16.4. Поскольку в левой части уравнения стоит произведение синуса и косинуса от одного аргумента, удобно воспользоваться формулой синуса двойного угла. Записать, чему равен аргумент.

16.5. Перейти к уравнению без логарифмов, позаботившись о сохранении ограничений.

16.6. Ввести вспомогательное неизвестное и преобразовать данное уравнение в квадратное. ↓

16.7. От этого уравнения легко перейти к тригонометрическому. При этом нужно учесть все ограничения, которыми логарифм связывает число и основание.

16.8. Уравнение равносильно уравнению

$$\sin x = \sqrt{8 \cos^2 x}$$

при условии, что $\cos^2 x \neq \frac{1}{8}$.

16.9. Перейти к уравнению

$$5\pi \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

и найти все k , при которых это равенство возможно.

16.10. Вначале решить квадратное уравнение относительно $\lg \cos x$. Затем найти $\cos x$ и на этом шаге провести исследование.

16.11. Решить квадратное уравнение и учесть все ограничения на параметр a в связи с появлением радикала и синуса.

16.12. Данную систему нужно заменить системой без логарифмов. Однако при этом следует помнить обо всех ограничениях, которые накладываются на число, стоящее под знаком логарифма, и на основание логарифма.

17.1. Первый способ. Если обозначить $z_1 = x + yi$ и $z_2 = u + vi$, то придем к иррациональному неравенству, которое естественнее доказывать от противного (это позволяет меньше заботиться о равносильности при преобразованиях). ↓

Второй способ. Воспользоваться геометрической интерпретацией модуля комплексного числа как радиуса-вектора его аффикса и воспользоваться неравенством треугольника

17.2. Записать $z = a + bi$ и домножить дробь $\frac{z-1}{z+1}$ на число, комплексно сопряженное знаменателю.

17.3. Применить формулу Моавра.

17.4. Записать комплексное число, стоящее в скобках, в виде произведения действительного числа и комплексного числа, записанного в тригонометрической форме.

17.5. Записать $z + \frac{1}{z}$ в тригонометрической форме, если тригонометрическая форма z известна, и приравнять мнимую часть нулю.

17.6. Уравнение, которому удовлетворяет z , можно привести к виду $z^2 - z + 1 = 0$. Теперь нетрудно найти, чему равняется z^3 , если разложить на множители $z^3 + 1$.

17.7. Для комплексно сопряженных чисел z и $\bar{z}$ имеет место равенство $|z| = |\bar{z}|$. Остается записать по модулю равенство, данное в условии. В результате получим систему двух уравнений относительно $|z|$ и $|\bar{z}|$, а следовательно, сможем найти эти величины.

17.8. Любое уравнение $f(z) = 0$ с комплексным неизвестным равносильно системе двух уравнений, к которой мы придем, приравняв нулю действительную и мнимую части $f(z)$.

17.9. Если второе уравнение возвести в третью степень и разделить на первое, то получим $z^3\omega^3=1$. Решить это уравнение совместно с третьим.

17.10. Заменить $z=x+yi$ и получить уравнение, связывающее x и y . ↓

17.11. Первый способ. Если обозначить $z=x+iy$, то сможем перейти к простому неравенству, связывающему действительные переменные x и y .

Второй способ. Воспользоваться геометрическим смыслом модуля разности двух комплексных чисел. ↓

17.12. Обозначить $z=x+yi$. Выделить действительную часть выражения $z - \frac{1}{z}$ и приравнять ее нулю. ↓

18.1. Если ввести в качестве неизвестных производительности труб, то получим три уравнения с четырьмя неизвестными (объем бассейна следует принять за единицу).

18.2. Если плечи весов равны l_1 и l_2 , то можно вычислить вес P товара, отпущенного покупателю.

18.3. Если население страны равно x , то через год оно вырастет до $x\left(1+\frac{1}{80}\right)$. Что будет через n лет?

18.4. Путь буксира изображен на рис. 1. 18.4, где x — часть пути, которую прошел самостоятельно (т. е. без буксировки) первый понтон, а y — часть пути, которую прошел без буксировки второй понтон.

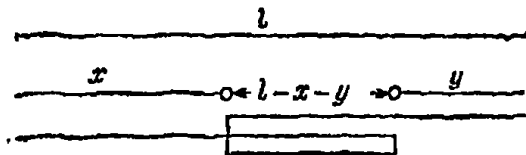


Рис. 1.18.4.

18.5. Так как некто родился в девятнадцатом веке, то неизвестны две последние цифры его года рождения. Если мы обозначим их через x и y , то сможем записать условия задачи в виде уравнений.

18.6. Если одна часть весит x карат, то ее цена lx^2 , где l — коэффициент пропорциональности.

18.7. Основная трудность — в выборе неизвестных, которые позволили бы связать данные в условии величины. Здесь эту роль могут выполнить нормы расхода горючего при работе двигателя с фиксированной собственной скоростью. К чему удобнее отнести эти нормы к часу работы двигателя или к километру пути в стоячей воде?

18.8. Выбор неизвестных подсказан условием задачи: x , y , z , s и t — количество десятков порций соответствующих сортов мороженого. Выбрав в качестве неизвестных количество десятков порций, а не количество самих порций, и заметив, что неизвестные — натуральные числа, мы тем самым использовали условие, в силу которого у продавца есть

по несколько десятков порций мороженого. Последнее условие задачи запишется в виде неравенства $y > s$. Это ограничение позволит нам восполнить отсутствие пятого уравнения в системе с пятью неизвестными.

18.9. Начать нужно с условия, что, отобрав по одной монете каждого типа, мы получим 15 копеек. Так как десятикопеечная монета сюда входит обязательно, то оставшиеся монеты дадут в сумме 5 копеек.

18.10. Пусть C — устье реки. Время, израсходованное плотами на весь путь от A до B , известно, а время, израсходованное на путь CB , обозначим через x . Если ввести в рассмотрение расстояние AC , то скорость течения реки можно выразить из остальных условий задачи.

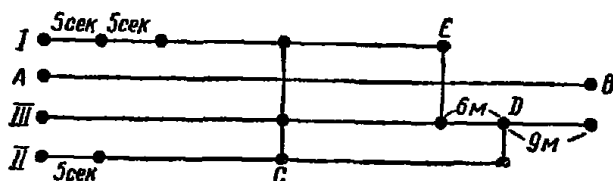


Рис. I.18.11.

18.11. Условия задачи можно отразить на схеме (рис. I.18.11). С помощью схемы можно составить четыре уравнения: встреча в точке C дает два уравнения и две оставшиеся встречи — по одному.

18.12. Вначале нужно проследить весь процесс за один цикл в предположении, что объем сосуда принят за единицу, а часть его объема, занимаемая раствором, обозначена через x .

18.13. В качестве неизвестных удобно выбрать: x — скорость автомобиля, y — скорость мотоцикла и z — расстояние между пунктами A и B . Первая встреча произошла через $\frac{z}{x+y}$ часов после начала

движения на расстоянии $\frac{zy}{x+y}$ километров от пункта B .

Теперь нетрудно подсчитать расстояние между пунктами первой и второй встреч.

18.14. В качестве неизвестных удобно выбрать расстояние (x), которое пассажир проехал на такси и (y) на автобусе, скорость поезда (u) и время, на которое пассажир опоздал на поезд (t).

18.15. Скорости поездов связаны со всеми величинами, участвующими в задаче. Поэтому естественно ввести в качестве неизвестного x скорость товарного поезда до остановки. Тогда mx — скорость пассажирского поезда до остановки.

Однако одного неизвестного здесь мало, так как поезда выходили из своих пунктов в разное время. Чтобы связать скорости и времена, нам нужно ввести в рассмотрение расстояния. Пусть расстояние между A и B равно y , а расстояние между A и C равно z .

18.16. Вопрос задачи не имеет прямого отношения к ее решению. Поэтому величину, о которой спрашивается в задаче, не следует выбирать в качестве неизвестного, так как она сложно связана с остальными компонентами. Наиболее удачно связать участвующие в задаче величины — расстояния и промежутки времени — можно с помощью скоростей самолета и вертолета.

18.17. Если обозначить устье реки, на которой стоит порт M , буквой A , а устье второй реки буквой B , то для решения задачи удобно ввести два неизвестных расстояния. Сразу же появляется желание обозначить расстояние AB , которое требуется определить, буквой x , один из оставшихся отрезков, MA или NA , — буквой y , а последний отрезок записать как $s - (x + y)$. Однако более естественно не нарушать симметрию и обозначить буквами x и y отрезки MA и BN соответственно. Тогда отрезок AB будет равен $s - (x + y)$. Поскольку нас интересует только отрезок AB , то нужно определить $x + y$.

19.1. Записать выражения для u_n и u_{n+1} и сравнить.

19.2. Поскольку первый член арифметической прогрессии входит в качестве слагаемого в выражения для любого ее члена, удобнее сразу записать $a_q - a_p$, $a_r - a_q$, $a_s - a_r$. Это тем более удобно, что нас интересуют разности $p - q$, $q - r$, $r - s$.

19.3. Если ввести a_1 и u_1 — соответственно первые члены арифметической прогрессии с разностью d и геометрической прогрессии со знаменателем q , то a , b и c придется выразить через a_1 , u_1 , d и q .

19.4. В левой части удобно перейти к общему основанию x .

19.5. Если бы сумма состояла из одних девяток, то каждый член можно было бы представить в виде $10^k - 1$.

19.6. Выражение, стоящее под знаком квадратного корня, умножить и разделить на 9. Число, состоящее из k девяток, равно $10^k - 1$.

19.7. Условия задачи можно записать в виде $a_1 + a_3 = 2a_2$, $a_1 a_3 = a_2^2$. Из этой системы нетрудно исключить a_2 .

19.8. Удобно ввести в рассмотрение знаменатель прогрессии q и с его помощью записать теорему Виета для обоих уравнений. Это позволит определить q и x_1 . ↓

19.9. Так как корни уравнения образуют геометрическую прогрессию, то $x_2 = x_1 q$, $x_3 = x_1 q^2$. Воспользуйтесь теоремой Виета для уравнения третьей степени.

19.10. Если приравнять выражения для удвоенной суммы l членов прогрессии и суммы всех ее членов, то получим уравнение относительно q^n .

19.11. Так как число делится на 45, то оно может оканчиваться либо нулем, либо пятью. Рассмотреть эти два случая.

19.12. Если обозначить через x цифру единиц, а через q — знаменатель прогрессии, то легко составить два уравнения, отражающих условия задачи. Однако можно пойти по другому пути: поскольку цифры числа образуют геометрическую прогрессию и само число больше 594, то в нашем распоряжении только три возможности: 931, 842 и 964. ↓

19.13. Вся работу следует принять за единицу. Чтобы использовать условия задачи, нужно знать производительность одного

комбайна. Однако нам неизвестно, сколько часов перед завершением работы по плану все комбайны работали вместе. Поскольку удобнее вводить одноименные неизвестные, то эту величину обозначим через y , а через x обозначим количество часов, необходимых одному комбайну, чтобы убрать весь урожай. Тогда производительность комбайна будет равна $1/x$.

19.14. Пусть братьям a , aq и aq^2 лет. Если младший получит x рублей, то остальные два получают xq и xq^2 рублей. Условия задачи позволяют составить три уравнения.

19.15. После того как числа, о которых говорится в задаче, будут обозначены буквами a , b и c и условия задачи будут переведены на математический язык, мы получим два уравнения с тремя неизвестными. Достаточно ли этого, чтобы решить задачу?

19.16. Воспользоваться методом математической индукции, что позволит доказать формулы для a_n и b_n .

20.1. Данное неравенство эквивалентно такому:

$$\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Оценить каждое слагаемое так, чтобы легко было оценить всю сумму, стоящую слева.

20.2. Домножить все члены на d .

20.3. Чтобы разложить дробь $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ на простейшие, можно начать с разложения дроби $\frac{1}{k(k+2)}$, а результат умножить на $\frac{1}{k+1}$. ↓

20.4. Слева стоит сумма членов геометрической прогрессии.

20.5. Выписать все коэффициенты многочлена $1+x+2x^2+\dots+x^k+px^{k+1}$ и под ними написать коэффициенты того же многочлена, записанные в обратном порядке. Рассмотреть сумму произведений стоящих друг под другом чисел.

20.6. В левой части неравенства стоит абсолютная величина суммы членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $-2x$.

20.7. Каждое слагаемое $k \cdot k!$ можно представить в виде $(k+1)k! - k(k-1)!$. При этом следует иметь в виду, что $0! = 1$. ↓

20.8. Коэффициенты в правой части образуют арифметическую прогрессию с разностью 3. Если домножить S_n на x^2 , то справа получим сумму, все члены которой, кроме крайних, имеют коэффициент, отличающийся от подобного коэффициента S_n на 3.

20.9. Рассмотреть тождество

$$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

и положить в нем последовательно $x=1, 2, \dots, n$.

20.10. В n -й группе n членов. Рассмотрите отдельно случаи, когда n четное и n нечетное.

20.11. Удобнее найти $2S_n \sin \frac{\pi}{2n}$.

21.1. Если все, сидящие за круглым столом, одновременно сдвинутся на один стул в одном направлении, то у каждого останутся те же самые соседи.

21.2. Представить искомое число в виде разности числа всех перестановок из пяти элементов и перестановок, не удовлетворяющих условиям задачи.

21.3. Три разряда каждого числа должны быть заняты двойками. В оставшиеся четыре разряда можно поместить любые из восьми цифр, что даст 8^4 вариантов.

21.4. Задачу следует начать решать в предположении, что есть разные цифры 1_1 , 1_2 и 1_3 , которые входят в каждое число, а остальные пять цифр равноправны.

21.5. Легче найти число всевозможных размещений экскурсантов по каютам в предположении, что каюты неравноценны. Пусть таких размещений будет N , а размещений, о которых идет речь в задаче, K . Поскольку из каждого размещения экскурсантов по равноценным каютам можно получить $8!$ размещений по неравноценным каютам, то $K \cdot 8! = N$.

21.6. В записи k -го члена суммы произвести сокращение на k .

21.7. Воспользоваться разложением $(1+i)^n$ по формуле бинома.

21.8. Нужно найти такие n , для которых равенство

$$C_n^{k-1} + C_n^{k+1} = 2C_n^k$$

выполняется при некотором k .

21.9. Представить $a+b+c+d$ в виде $(a+b)+(c+d)$ и осуществить возведение в n -ю степень по правилам возведения в степень двучлена.

21.10. Коэффициент при x^k будет равен числу членов, содержащих x^k при почленном перемножении двух одинаковых многочленов. Придется различать случаи, когда члены, содержащие x^k , могут быть получены в результате умножения друг на друга членов суммы $1+x+x^2+\dots+x^{k-1}+x^k$ ($0 \leq k \leq n-1$), от случая, когда $n-1 < k \leq 2(n-1)$.

21.11. Записать выражение для общего члена разложения и сравнить с выражением для десятого члена разложения.

21.12. Сгруппировать члены внутри скобки и последовательно дважды применить формулу бинома.

21.13. Если обозначить через P_n число способов, которыми можно разбить на группы последовательность из n элементов, то можно получить рекуррентную формулу для P_n .

21.14. Если на плоскости проведены m параллельных прямых, то они разбивают плоскость на $m+1$ частей. Когда мы пересечем их некоторой прямой, то каждая часть разобьется на две. Что произойдет, если к уже приведенным k непараллельным прямым добавить еще одну?

22.1. Перенести $\operatorname{arctg} \frac{7}{23}$ в правую часть, после чего оценить значения обеих частей с тем, чтобы они попали в интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. ↓

22.2. Каждое из двух первых слагаемых лежит в интервале $(0, \frac{\pi}{4})$. Это позволяет воспользоваться формулой тангенса суммы и заменить два первых слагаемых одним.

22.3. Начать нужно с представления в виде значения одной тригонометрической функции первого и третьего слагаемых. Чтобы их сумма попала в область главных значений арккотангенса, придется прибавить к ней π . ↓

22.4. Если $0 \leq x \leq 1$, то сумма существует и лежит в интервале $[0, \pi]$, т. е. в интервале монотонности косинуса.

22.5. Начать нужно с выяснения, в каком интервале лежит $\pi(x^2 + x - 3)$, если $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

22.6. Убедившись в существовании арксинусов при $0 \leq x \leq 1$, перенести $\frac{\pi}{4}$ в левую часть, а вычитаемое — в правую часть, после чего доказать, что левая часть равенства будет лежать в интервале монотонности синуса. ↓

22.7. Так как $x < -1$, то значение каждой функции, входящей в правую часть, можно уточнить с тем, чтобы сумма попала в интервал монотонности синуса и тангенса. ↓

22.8. Из данного уравнения можно найти значения $\arcsin x$. Из этих значений остается выбрать те, которые лежат в области значений арксинуса. ↓

22.9. Поскольку $\arcsin x$ — нечетная функция, то одновременно с корнем x уравнение имеет корень $-x$. Это позволяет искать лишь неотрицательные корни.

22.10. Из условия следует, что $x > 0$. Левая часть заключена в интервале $[0, \pi]$, который является интервалом монотонности косинуса.

22.11. Воспользовавшись тем, что $2 + \cos x > 0$ и $2 \cos^2 \frac{x}{2} \geq 0$, можно уточнить интервал значений левой части уравнения.

22.12. Левая и правая части лежат в интервале монотонности синуса. ↓

22.13. Уточнение интервалов с тем, чтобы получить равносильное уравнение, приведет к иррациональному способу решения. Проще переписать, например, $\arctg(x+1)$ в правую часть и взять котангенсы от обеих частей. Каким образом может быть нарушена равносильность?

23.1. Поскольку $\sin x \leq 1$, то $\log_3 \sin x \leq 0$. ↓

23.2. В указанной последовательности действий первое ограничение накладывается на трехчлен $x^2 - x - 1$, он должен быть положительным. Следующее ограничение накладывается уже на $\log_{1/3}(x^2 - x - 1)$. ↓

23.3. Нужно пройти всю последовательность действий, начиная с самого внутреннего, и записать все встречающиеся при этом ограничения.

23.4. Найдя область определения функции $\arccos(x^3 - 3x + 1)$, исключить точки, в которых не существует $\lg 2x$. ↓

23.5. Решить систему неравенств, обеспечивающих существование данного выражения, графически. ↓

23.6. Доказательство удобно вести от противного. Предположить, что функция имеет период a , и подставить $x=0$, $x=a$.

23.7. Первый способ. Доказательство можно вести от противного, предположив, что функция имеет период T .

Второй способ. Найти корни функции и исследовать их в предположении, что у функции имеется период.

23.8. Записать тождество, равносильное условию, что $f(x)$ имеет своим периодом число T . Рассмотреть это тождество при $x=0$ и $x=\pm T$. ↓

23.9. Ясно, что любое общее кратное периодов $\cos \frac{3x}{2}$ и $\sin \frac{x}{3}$ будет периодом данной функции. Доказать, что наименьшее общее кратное будет основным периодом.

24.1. Заменить $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$. В результате получится квадратный трехчлен относительно $\sin x$.

24.2. Записать y как одну функцию другого аргумента.

24.3. Привести к одной тригонометрической функции другого аргумента.

24.4. Выражение можно представить в виде $A^2 + B^2 + C$, где C — константа.

24.5. Чтобы раскрыть знаки абсолютных величин, нужно нанести на числовую ось точки ± 1 и ± 2 , которые разобьют ее на пять интервалов.

24.6. Воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим нескольких чисел.

24.7. Чтобы найти максимум $AB + BC$, удобно ввести в рассмотрение углы x и y (рис. 1. 24.7), имея в виду, что $x + y = \pi - \alpha$, и перейти с помощью теоремы синусов к тригонометрическим соотношениям. ↓

24.8. Если обозначить катеты основания через a и b , то боковая поверхность призмы равна

$$(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \sqrt{a^2 + b^2},$$

причем $ab = 4$.

24.9. Квадрат должен быть вписан в шестиугольник так, чтобы не нарушалась

симметрия, т. е. центр квадрата должен совпадать с центром шестиугольника.

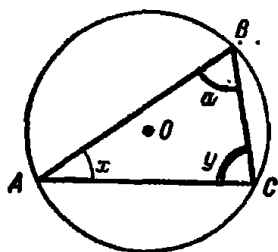


Рис. 1.24.7.

ВТОРЫЕ И ТРЕТЬИ УКАЗАНИЯ

1.1. Из треугольника AO_1D определить AO_1 , если известен радиус окружности O_1 (рис. I. 1.1.).

1.2. Зная AB , можно найти AD и радиус BO_1 описанной окружности (рис. II. 1.2). Нужно лишь заметить, что угол ABD равен $\frac{\pi}{2} - \alpha$, а $BE = \frac{AB}{2}$.

1.3. Возможны два случая взаимного расположения треугольника и окружности. Либо окружность будет вписана в треугольник так, что каждая точка касания делит соответствующую сторону пополам, либо одна вершина треугольника окажется внутри окружности, а две другие — вне.

Найдите решение, не зависящее от взаимного расположения окружности и треугольника. Для этого достаточно рассмотреть треугольник, который получится, если соединить середины сторон данного треугольника.

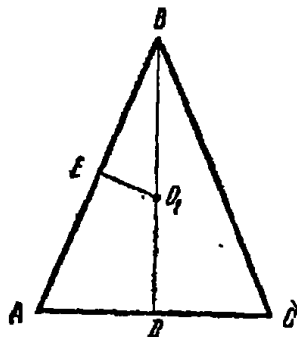


Рис. II.1.2.

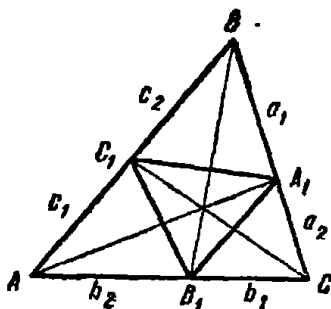


Рис. II.1.4.

1.4. Чтобы найти отношение площадей треугольников A_1B_1C и ABC , нужно применить теорему об отношении площадей треугольников, имеющих равный угол.

В обозначениях, введенных на рис. II. 1.4, имеем

$$\frac{S_{A_1B_1C}}{S_{ABC}} = \frac{a_2b_1}{ab}, \quad \frac{S_{A_1BC_1}}{S_{ABC}} = \frac{a_1c_2}{ac}, \quad \frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{b_2c_1}{bc}.$$

С помощью теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника остается выразить $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ через a, b и c .

1.5. Если центр вписанной в треугольник окружности обозначить через O , то площадь треугольника ABC можно будет вычислить как сумму площадей треугольников AOB, BOC и COA . При этом каждая из сторон AO, BO и CO может быть выражена через радиус r вписанной окружности. Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ тоже разбивается на три площади. A_1OB_1, B_1OC_1 и C_1OA_1 . Остается углы A_1OB_1, B_1OC_1 и C_1OA_1 выразить через углы треугольника ABC .

1.6. Из данного соотношения между площадями треугольников ADC и ABD , имеющих общую сторону AD и одинаковые углы при вершине A (поскольку AD — биссектриса треугольника ABC), можно найти отношение сторон $AC:AB$. Далее применить теорему синусов.

1.7. Площадь треугольника CAD (D — точка пересечения биссектрисы внешнего угла A треугольника ABC с продолжением стороны CB) можно вычислить двумя разными способами, используя лишь элементы, участвующие в задаче.

1.8. Сумма двух сторон треугольника, не лежащих против угла A , участвует в выражении площади через полупериметр и радиус вписанной окружности и в выражении через биссектрису и синус половинного угла. Из этих двух выражений сумму $b+c$ нужно исключить.

1.9. Отношение отрезков AO и OM дано. Эти отрезки можно рассматривать как отрезки, на которые сторона AM треугольника ABM разбита биссектрисой BO . В результате мы перейдем к отношению отрезков AB и BM , которые более удобны для использования теоремы синусов.

Аналогично нужно поступить с отношением отрезков BO и ON .

1.10. Угол PMA равен углу QOA (рис. II.1.10). Чтобы найти MP , нужно рассмотреть сначала треугольник PMA , а затем треугольник OAQ .

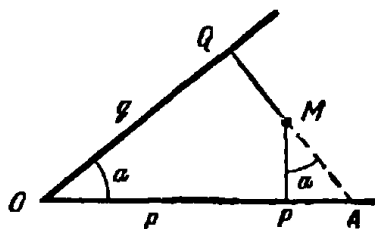


Рис. II.1.10.

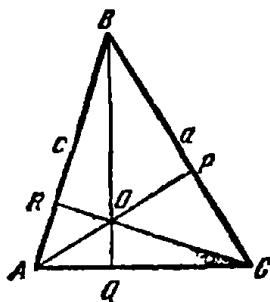


Рис. II.1.11.

1.11. С помощью первого указания можно получить одно уравнение, связывающее углы данного треугольника. Ко второму уравнению нас приведет условие, в силу которого высота BQ треугольника ABQ (рис. II.1.11) в 6 раз больше высоты OQ треугольника AOQ . Достаточно выразить AQ из треугольников ABQ и AOQ , заметив при этом, что угол OAQ является дополнительным для угла G .

1.12. После того как получено соотношение

$$\frac{h}{\sin C} + \frac{h}{\sin B} = k,$$

использовать условие, согласно которому $B - C = \frac{\pi}{2}$, с тем, чтобы получить уравнение относительно одной тригонометрической функции неизвестного угла C . Для достижения этой цели можно, например, в написанное выше соотношение подставить $B = \frac{\pi}{2} + C$. После этого полученное соотношение удобно возвести в квадрат.

1.13. Первый способ. Через x , y и z можно выразить площадь треугольника:

$$xa + yb + zc = 2S.$$

Еще три соотношения, в которых участвуют x , y и z , получим, если выразим каждый из отрезков AO , BO и CO из двух прилежащих к нему треугольников.

Второй способ. Связать отрезки l , m и n удобно с помощью теоремы косинусов для каждого из трех треугольников AOB , AOC и BOC , сумма площадей которых равна площади треугольника ABC .

1.14. Остается использовать условие, что $A - B = \varphi$. С помощью формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму придем к тригонометрическому уравнению относительно $\frac{A+B}{2}$.

1.15. Площадь треугольника ABC , которую мы временно обозначим через S , равна

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b.$$

Кроме того, S выражается через a , b , l и $\sin \frac{C}{2}$, если треугольник ABC разделить биссектрисой CD на два треугольника.

1.16. Для нахождения угла COB следует использовать тот факт, что центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис. Для этого нужно выразить $\angle COB$ через сумму $\angle OCB + \angle OBC$.

1.17. Так как в условии сказано, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то обозначим их длины через a , $a+d$, $a+2d$ и постараемся связать радиус вписанной окружности с длинами сторон. На рисунке треугольник удобно расположить так, чтобы средняя по длине сторона оказалась его основанием.

С помощью сравнения площадей легко выразить высоту треугольника через радиус вписанной окружности. Этот факт будет полезен для исследования образовавшихся подобных треугольников.

1.18. Заметить, что проекция отрезка AO (O — центр вписанной окружности) на сторону b равна $p-a$.

1.19. Чтобы доказать, что треугольники ABC и OKL подобны, достаточно установить равенство их углов. Так как углы треугольника ABC легко выражаются через угол C , то и углы треугольника OKL тоже следует постараться выразить через тот же угол C . Начать удобно с угла KOL , который равен углу AOB .

1.20. Чтобы связать стороны треугольника и его углы, удобно воспользоваться теоремой синусов; так как соотношение, которое нужно доказать, однородно, линейные элементы сократятся.

1.21. Если через одну из вершин треугольника ABC провести отрезок, параллельный противоположной стороне треугольника до пересечения с данной в условии прямой, то получим нужные подобные треугольники.

1.22. Если провести в треугольнике ABC высоту AE , то получим три прямоугольных треугольника; с помощью теоремы Пифагора AB^2 , AC^2 и AD^2 можно выразить через AE и отрезки, лежащие на BC .

1.23. Если AC — основание треугольника, то дополнительное построение удобно выполнить так: через вершины A и C провести прямые, параллельные BQ , а отрезки CR и AP продолжить до пересечения с этими прямыми. В результате возникнут все необходимые для решения подобные треугольники.

1.25. В качестве неподвижного радиуса удобно выбрать AO . Сумму квадратов расстояний выразить через радиус R описанной около треугольника окружности и угол α .

1.26. Две стороны и угол между ними известны. Третью сторону можно найти по теореме косинусов, а радиус описанной окружности — по теореме синусов.

1.27. Выразить $\cos A$ и $\cos C$ через стороны треугольника и сравнить $\cos 2C$ с $\cos A$, имея в виду данное в условии соотношение: $a^2 = c(b+c)$.

1.30. Сделать это можно так: BE будет стороной, соответствующей O_1E , а через точку E нужно будет провести прямую, параллельную KO_2 , и отложить на ней отрезок, равный KO_2 .

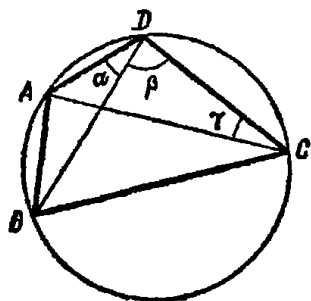


Рис. II.1.32.

1.31. Построить треугольник ABC до параллелограмма так, чтобы сторона AB была диагональю этого параллелограмма, а через вершину B провести $BD_1 \parallel AD$. Рассматривая треугольник MDC и подобный ему треугольник с вершинами в точках B и C , найдем отношение, в котором точка M делит отрезок AD .

1.32. Чтобы выразить все участвующие в формулировке задачи величины через R и синусы соответствующих углов, нужно ввести углы так, как это показано на рис. II. 1.32, и затем воспользоваться теоремой синусов.

1.33. Треугольники, которые получаются при продолжении боковых сторон трапеции до пересечения, подобны. К полученному отношению сторон остается применить производную пропорцию.

1.34. Чтобы использовать условие $AN:NB=1:2$, можно отметить на рисунке точку пересечения прямой с продолжением одной из сторон квадрата. Того же эффекта мы добьемся, если проведем через точку N прямую, параллельную BC .

1.35. Чтобы составить уравнение относительно x , удобно выразить через x отрезок AE один раз с помощью квадрата, а другой раз с помощью треугольника.

1.36. Чтобы связать треугольник и трапецию с окружностью, естественно провести радиусы в вершины обеих фигур. К этим радиусам прилегают прямоугольные треугольники. Выясните, какие из них равны.

Углы NOE и OAD (рис. II. 1.36) можно выразить через угол α и убедиться в том, что они равны.

1.38. Выразить через R и n периметры первого и второго многоугольников и сравнить с периметром третьего многоугольника.

1.39. Величину R можно будет вычислить, если мы построим треугольник, в котором все стороны выражаются через R и известные величины. В качестве такого треугольника удобно выбрать треугольник OMO_1 , где O_1 — центр рассматриваемой в задаче окружности.

1.40. Ввести в рассмотрение угол ADC (обозначить его через φ) и равный ему угол BEC . Найти $\lg \varphi$.

1.41. Чтобы применить к треугольнику AOO_1 теорему косинусов, придется ввести в рассмотрение угол β между хордой AB и диаметром, исходящим из точки A . Косинус и синус этого угла легко выразить через b и r .

1.42. Чтобы использовать условие задачи, нужно соединить центр окружностей с концами и серединами хорд, являющихся сторонами квадрата. При решении следует помнить, что возможны два варианта взаимного расположения квадрата и центра окружностей: либо центр лежит внутри квадрата, либо вне его.

1.43. Чтобы составить уравнение относительно x , рассмотрите треугольник OEC , в котором все стороны можно выразить через R и x .

1.44. Ввести обозначения R , r и x , где x — расстояние между проекциями центров на нижнее основание. Составить уравнения, используя условия задачи и теорему Пифагора.

1.45. Чтобы доказать, что фигуры $CQNK$ и OQD равновелики, достаточно доказать, что равновелики секторы COQ и KDN . Для этого следует выяснить связь радиусов большей и меньшей окружностей.

1.46. Пусть K — проекция точки O на AB . Отрезок OK можно вычислить двумя способами: из треугольника OAK и из треугольника OKP_1 .

1.47. Так как хорды пересекаются внутри окружности, то естественно воспользоваться равенством произведений отрезков, на которые каждая хорда делится точкой пересечения.

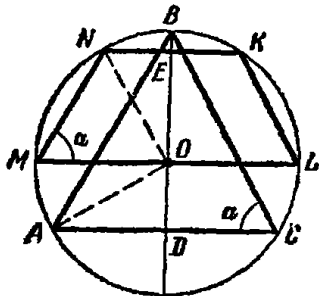


Рис. II.1.36.

1.48. Чтобы связать x и R , а именно это требуется в условии задачи, нужно опустить из центра O_2 перпендикуляры O_2D и O_2C на радиусы OA и OB соответственно.

Рассмотреть треугольник O_2CO_1 . Выразить O_2C через x и R , используя тот факт, что угол $OAB = 45^\circ$.

1.49. Угол AMC равен $\pi - 2\varphi$. Если $MB = MC = px$, то AC можно выразить из треугольников AMC и ABC . Приравняв эти выражения, получим уравнение относительно x .

2.1. Осуществить параллельный перенос отрезка DC в точку B .

2.2. Сколько решений имеет задача?

2.3. Мы знаем, что точки A и A_1 лежат на прямой, параллельной BC и отстоящей от BC на расстоянии h_a . Нужно найти еще одно свойство любой из этих точек; в этом должен помочь угол φ .

Отразим треугольник CA_1A от оси A_1A и получим треугольник C_1A_1A (рисунок сделайте самостоятельно). Фигура C_1ABA_1 — параллелограмм, у которого вершины C_1 и B фиксированы, углы известны, а две другие вершины нужно построить.

2.4. Зная R и b (рис. II.2.4), можно построить треугольник AOF . Остается использовать медиану m_c . Чтобы это сделать, нужно, после того как построен треугольник AOF , построить середину отрезка AB .

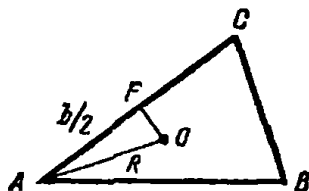


Рис. II.2.4.

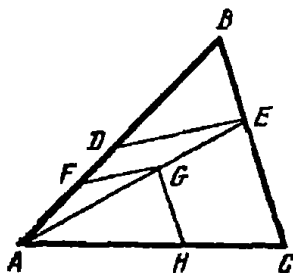


Рис. II.2.6.

2.5. Докажите, что точка Q лежит на окружности, описанной около треугольника ABC . Для этого достаточно вычислить угол BO_1C .

2.6. Предположим, что точки D и E найдены (рис. II.2.6). Если через любую точку F , лежащую на AB , провести прямую FG , параллельную DE , а через точку G — прямую GH , параллельную EC , то получим четырехугольник $AFGH$, подобный $ADEC$, с центром подобия в точке A .

2.7. «Средним» будет такое положение прямой FE , когда $FM = ME$.

2.8. В треугольнике A_1AA_2 известны основание и высота. Третий элемент этого треугольника можно найти, если использовать данный в условии угол A треугольника ABC , через который легко выразить угол A_1AA_2 .

2.9. Если взять любой из треугольников, образовавшихся при вершине P (рис. II.2.9), то начало для построения ломаной, составленной из AP , BP и CP , уже есть. Однако просто построить недо-

стающее звено нельзя, так как последняя вершина такой ломаной не будет закреплена, а потому не позволит решить задачу.

На помощь приходит свойство правильного треугольника: поверните треугольник ABP на 60° вокруг точки A и вы получите ломаную B_1P_1PC , равную сумме отрезков AP , BP и CP . При этом точка B_1 однозначно определяется видом треугольника ABC .

2.10. Чтобы построить точку C , достаточно знать длину отрезка CE или длину отрезка $DE = CE - l$. Задача сводится к вычислению и построению отрезка DE .

2.11. Вершина C лежит, с одной стороны, на окружности радиуса b с центром в точке B , а с другой стороны, на прямой, параллельной AD , которую нетрудно построить.

2.12. Остается построить треугольник OMC по трем сторонам: $CM = AO = R$, $OC = 2R$, OM известно, так как точки O и M даны.

2.13. Треугольник OO_1E , где $O_1E \parallel AB$, а точка E лежит на OC , легко построить, зная $O_1E = \frac{a}{2}$.

2.14. Точки M и N лежат на окружности, концентрической данной.

2.15. Перенести параллельно отрезок PQ в отрезок B_1B и рассмотреть угол APB_1 .

2.16. В качестве одной из вершин параллелограмма удобно выбрать точку B . Отразив ее симметрично от точки M , получим еще одну вершину — точку E .

Чтобы построить параллелограмм $FBDE$ на его диагонали, нужно найти еще одну связь между вершинами F и D и данными элементами. Заметим, что точка A еще никак не участвовала в построениях. Если соединить ее с точкой F , то получим угол AFE , который известен, так как выражается через угол ACB .

2.18. Воспользоваться тем, что высоты в треугольнике пересекаются в одной точке.

2.19. Провести прямую через точки C и M и найти точку ее пересечения с данным диаметром или его продолжением.

3.1. Выразить длину отрезка OC через OA .

3.2. Данный треугольник и все треугольники, образовавшиеся при его проектировании на плоскость P , определены с точностью до подобия. Поэтому соотношение между углами можно получить, введя в рассмотрение некоторый линейный элемент, зависящий от всех участвующих в задаче углов.

В качестве линейного элемента взять расстояние от вершины прямого угла треугольника до плоскости P .

3.3. При построении плоскости Q мы можем произвольно выбрать две величины: расстояние от точки O до этой плоскости и угол

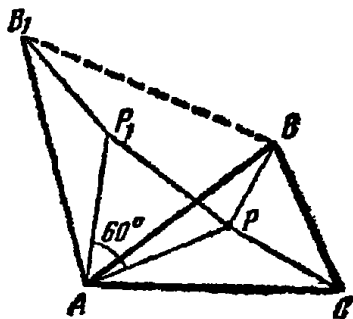


Рис. II.2.9.

ABO (рис. II.3.3), чтобы пирамида OAA_1B_1B имела наиболее удобный вид. При изменении расстояния от точки O до плоскости Q возникает фигура, подобная первоначальной. Это не отражается на рассматриваемых углах, а потому позволяет ввести линейный элемент, через который впоследствии мы выразим все стороны треугольника OAB .

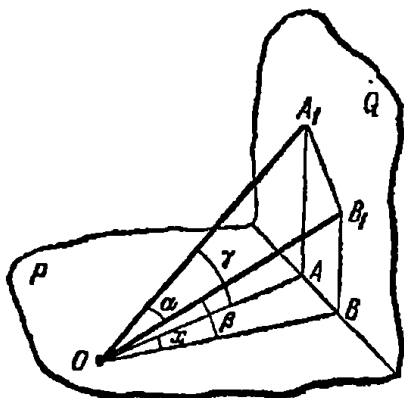


Рис. II.3.3.

В качестве линейных элементов удобно выбрать отрезки AA_1 или BB_1 , так как это позволяет легко вычислить стороны треугольника OAB и затем угол AOB . Однако мы должны выбрать лишь один линейный элемент. Поэтому расположим плоскость Q так, чтобы $AA_1 = BB_1$.

3.4. Точка, в которую спроектируется искомая прямая, должна быть одинаково удалена от проекций прямых b, c и d . Рассмотреть

различные случаи расположения проекций, которые могут возникнуть.

3.5. Чтобы связать искомый угол с треугольником и отрезком AS , построим в плоскости P прямоугольник, две стороны которого лежат на AB и CD , а AC —его диагональ.

3.6. Отрезок OK можно выразить из треугольников OKM и OKP и приравнять полученные выражения. Еще одно соотношение между интересующими нас величинами получим с помощью отрезка AP . Останется воспользоваться равенством, содержащимся в условии.

3.7. В двух противоположных гранях четырехгранного угла должны лежать параллельные стороны параллелограмма. Однако эти грани имеют общую точку—вершину угла, поэтому они пересекаются по некоторой прямой. Противоположные стороны параллелограмма должны быть параллельны этой прямой.

3.8. Рассмотреть треугольник FBA и убедиться, что угол CAF прямой.

3.9. Если вершина пирамиды спроектируется в точку, лежащую внутри основания, то с помощью сравнения площадей легко сосчитать, чему равна сумма расстояний от этой точки до сторон треугольника.

Расстояния от точки, в которую проектируется вершина пирамиды, до сторон треугольника выражаются через высоту пирамиды и данные углы. Пользуясь этим, можно вычислить высоту пирамиды. Случай, когда вершина проектируется не внутрь основания, не составляет ничего нового.

3.10. Высота DO пирамиды будет лежать в плоскости EDC (докажите). Ее можно выразить сначала через ED , а затем через EC и искомый угол.

3.11. Чтобы вычислить площадь боковой поверхности пирамиды, нужно найти либо боковое ребро, либо тригонометрические функции угла x . Второе сделать легче, так как углы x и $2x$ встречаются в двух различных прямоугольных треугольниках с одинаковой гипотенузой.

3.12. Начать нужно с определения коэффициента пропорциональности длин параллельных ребер тетраэдров. Для этого придется рассмотреть треугольник, образованный двумя медианами, которые принадлежат разным треугольникам, но опираются на одно ребро тетраэдра.

3.13. Если O_1 (рис. II.3.13) — центр вписанного шара, а O и M — точки касания с плоскостями ABC и ASB соответственно, то совсем не очевидно, что точки O_1 , M , D и O лежат в одной плоскости (DM и DO — касательные к сечению шара плоскостью SDC). Тем более не очевидно, что точки S , O_1 и O лежат на одной прямой.

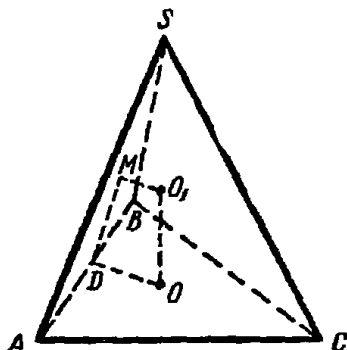


Рис. II.3.13.

Доказать, что три точки лежат на одной прямой, можно, например, установив, что они одновременно принадлежат двум плоскостям, пересекающимся по этой прямой. Для точек S , O_1 и O удобно выбрать две плоскости, одна из которых проходит через AS , а другая — через SC .

3.14. Достаточно ограничиться рассмотрением схематического чертежа (рис. II.3.14), имея в виду, что $H - h_2 = \frac{H - h_1}{2}$. Это соотношение соответствует условию, согласно которому

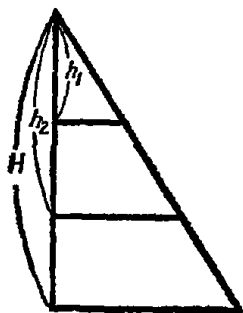


Рис. II.3.14.

которому интересующее нас сечение проходит через середину высоты усеченной пирамиды.

3.15. Если вычислить DE^2 , то косинус угла DAE найдем с помощью теоремы косинусов из треугольника ADE . Вычислить DE^2 можно, воспользовавшись тем, что DO — медиана одновременно в двух треугольниках: ADC и BDE .

3.16. Углы α и β в сумме образуют угол, все тригонометрические функции которого известны. Взяв, например, $\cos(\alpha + \beta)$, мы получим еще одно уравнение.

3.17. Треугольники DAM и DMS имеют общую сторону MD и смежные углы при вершине M . Следовательно, отношение их площадей равно отношению отрезков AM и MS .

Воспользоваться подобием треугольников, образовавшихся в плоскости ASB .

Ввести линейный элемент, через который выразить длины отрезков. Удобно выбрать сторону квадрата, лежащего в основании, так

объемов для тела $ANBMC D$ позволяет получить уравнение относительно $\sin \alpha$.

3.30. Если ввести в рассмотрение высоту H призмы и сторону ее основания a , то из правильного треугольника $B_1A_1C_1$ мы легко выразим a через R , а с помощью треугольника DA_1E выразим и H через R .

Для треугольника DA_1E применить метод сравнения площадей.

3.31. Рассмотреть треугольник, образованный высотой тетраэдра, одним из боковых ребер и проекцией этого ребра на плоскость основания, а также подобный ему треугольник, в котором участвует искомый радиус.

3.32. Из всех подобных кубов с центром в точке O удобно выбрать тот, вершина которого, противоположная точке O , лежит на грани параллелепипеда.

3.33. Пусть разность между углами A и C равна φ , а BD — биссектриса угла B (рис. II.3.33). Легко показать, что

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}.$$

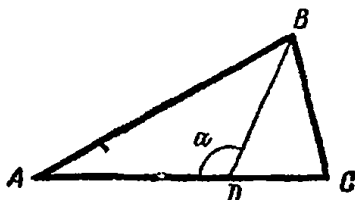


Рис. II.3.33

Затем удобно представить площадь треугольника ABC как сумму площадей треугольников ADB и BDC .

3.34. Расстояние между диагоналями C_1D и B_1C (рисунок сделайте сами) равно расстоянию между плоскостями A_1C_1D и AB_1C .

3.35. Основание перпендикуляра, опущенного из точки K на диагональ куба, обозначим через O_1 . Для треугольника OKO_1 можно воспользоваться свойством отрезков, на которые биссектриса делит сторону основания.

3.36. Если ребро тетраэдра обозначить через a , то диаметр цилиндра тоже равен a . Чтобы выразить через a высоту OO_1 цилиндра, нужно связать отрезок OO_1 с вершинами тетраэдра. Для этого удобно соединить O_1 и B .

3.38. Найти связь между радиусами шаров и величинами H , ρ и r можно, рассмотрев осевое сечение конуса.

3.39. Если рассмотреть осевое сечение обоих конусов, то задача станет плоской. Чтобы связать радиусы

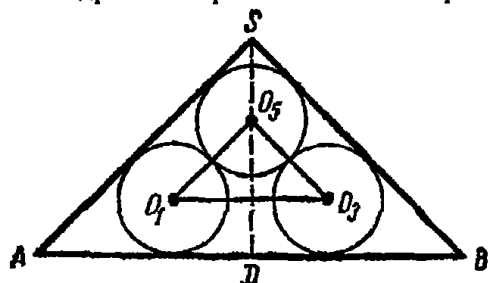


Рис. II.3.41.

оснований конусов, в качестве вспомогательной величины удобно выбрать радиус сферы.

3.40. Определить полупериметр основания пирамиды.

3.41. В осевом сечении, проходящем через O_1 и O_3 , получим картину, изображенную на рис. II.3.41. Все стороны треугольника

$O_1O_2O_3$ нам известны (O_1O_3 легко найти из рис. I.3.41) (см. стр. 108). Остается определить SD и AD .

3.42. Треугольники ASD и EMK подобны, т. е. углы SAD и MEK равны. Котангенс угла SAD нам известен, так как $AD=a$, $SD=h$.

Из треугольника SDC можно найти радиус основания цилиндра, а затем из треугольника EMK определить EK .

3.43. Рассмотрим подобные треугольники SOA и SO_1B , где O_1 — центр куба, а B — одна из вершин диагонального сечения куба, параллельного плоскости основания конуса. Это позволит найти одну связь между ребром куба a , высотой конуса H и радиусом его основания R (рис. II.3.43).

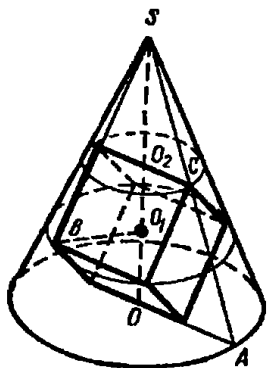


Рис. II.3.43.

Вторую связь между H , R и a можно будет найти, рассмотрев вторую пару подобных треугольников: SO_1B и SO_2C . Здесь O_2 — середина верхнего ребра куба, а C — одна из вершин этого ребра. Имея в распоряжении два уравнения, можно выразить R и H через a и тем самым решить задачу.

3.44. В предыдущих рассуждениях не использовано условие, согласно которому три стороны трапеции, являющейся боковой гранью пирамиды, равны b . С помощью этого условия можно найти другое выражение площади боковой грани через a и b и приравнять первому.

Решить полученное однородное уравнение относительно $\frac{a}{b}$. Остается связать величину b с радиусом вписанного шара. Для этого достаточно рассмотреть треугольник, получающийся при проектировании одной вершины верхнего основания на нижнее.

3.45. Обозначим через O_1 и O_2 центры меньших шаров, через O_3 — центр большего шара, через O — центр шара, радиус которого нужно найти (рис. II.3.45); P_1, P_2, P_3, P — точки касания этих шаров с плоскостью.

Радиус искомого шара обозначим через x . Тогда известны длины изображенных на рисунке отрезков: $O_1P_1=O_2P_2=r$, $O_3P_3=R$, $OP=x$, $O_1O_2=2r$, $O_1O_3=O_2O_3=R+r$, $OO_1=OO_2=r+x$, $OO_3=R+x$. Мы считаем очевидным, что $x < r$.

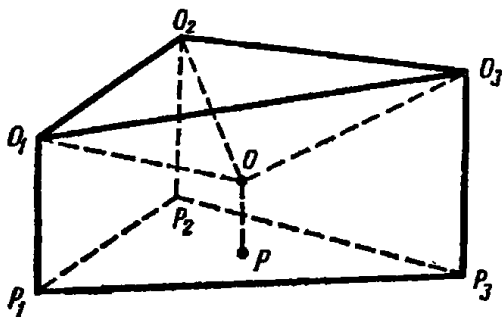


Рис. II.3.45.

Нужно найти соотношение, связывающее величины R , r и α . Для этого придется рассмотреть треугольник $P_1P_2P_3$ и вычислить длины проекций отрезков, соединяющих центры шаров. Так как шары O_1 и O_2 равны, то $O_2O_3 = O_1O_3$ и, следовательно, $P_2P_3 = P_1P_3$. Поэтому точка P лежит на высоте и медиане равнобедренного треугольника $P_1P_2P_3$.

3.46. Обозначим через O_1 центр одного из двух равных шаров, а через O_3 — центр меньшего шара. Пусть эти шары касаются нижней грани двугранного угла (рис. II.3.46) в точках B и D соответственно; тогда O_1B и O_3D — перпендикуляры. Прямоугольные треугольники O_1AB и O_3CD имеют углы при вершинах A и C , равные

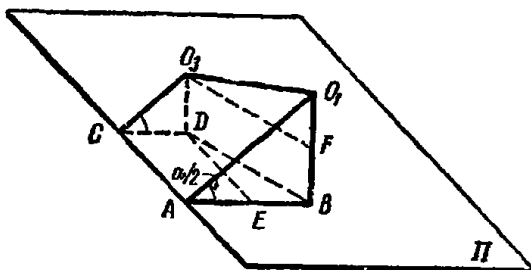


Рис. II.3.46.

$\frac{\alpha}{2}$. Чтобы использовать факт касания шаров O_1 и O_3 и наличие у них общей касательной плоскости Π , нужно рассмотреть треугольник O_1O_3F , в котором $O_1O_3 = R + r$ (R — радиус большого шара, r — радиус меньшего шара), $O_1F = R - r$ (F — проекция точки O_3 на отрезок O_1B). Если удастся выразить O_3F через R , r и α , то мы получим соотношение, позволяющее определить угол α .

Отрезок O_3F (см. рис. II.3.46) равен BD , а BD можно выразить через катеты прямоугольного треугольника BDE , где E — проекция точки D на отрезок AB . Чтобы найти ED , нужно воспользоваться фактом касания шаров O_1 и O_2 , сделайте на рисунке необходимые построения, рассмотрев проекцию их линии центров на плоскость Π .

3.47. Так как каждый из трех шаров с центрами в точках O_1 , O_2 , O_3 касается боковой поверхности конуса и плоскости P , то длина

перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость P , равна длине перпендикуляра, опущенного из центра на ближайшую к нему образующую (рис. II.3.47).

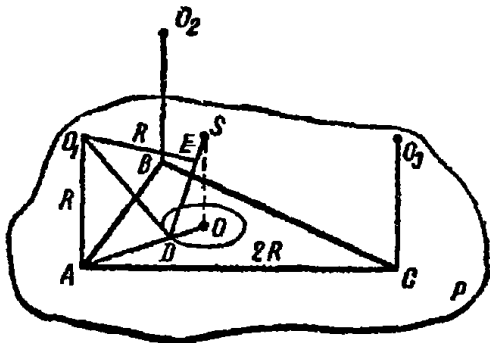


Рис. II.3.47.

4.7. Обозначить сторону основания через a и выразить площадь сечения через a и высоту боковой грани.

4.8. Нужно доказать, что точка D лежит на отрезке KM (см. рис. 1. 4.8 на стр. 111). Однако сделать это непосредственно трудно. Удобнее изменить построение: EK —высота пирамиды $EABC$, D —середина AC . Проведем через K и D прямую, которая пересечет AB в точке M . Докажем, что EM —высота в треугольнике ABE .

Если мы убедимся в том, что $KCOD$ —параллелограмм, то отрезок KD параллелен CO и, следовательно, перпендикулярен к AB , откуда EM —высота треугольника ABE .

4.9. В сечении получается пятиугольник, в котором отрезок, параллельный AC_1 , не является высотой, так как основания параллелепипеда—не квадраты. Высоту нужно вычислить, чтобы найти площадь пятиугольника.

4.10. Докажите, что при вращении точки E тень, отбрасываемая верхним основанием куба, перемещается, но не изменяется—это квадрат со стороной $2h$.

Тень при любом положении источника E состоит из двух квадратов $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$, стороны которых параллельны, сторона второго вдвое больше стороны первого, а отрезок, соединяющий центры, имеет постоянную длину R . Чтобы построить из этих квадратов тень, нужно соединить соответствующие вершины квадратов и получить выпуклую фигуру. Задача свелась к плоской.

5.2. В треугольнике AMB ввести в рассмотрение медиану, выразить ее квадрат через стороны треугольника, воспользоваться полученными ранее соотношениями.

Доказать, что медиана MC равна AB .

5.3. Косинус угла A , участвующий в теореме косинусов, можно определить из треугольника AMO , где O —центр окружности, о которой идет речь в условии задачи.

Обратное утверждение можно доказывать в такой форме: если $AC=2BC$ и $2AM^2+MB^2=AB^2$, то $AO=MO$. Здесь тоже естественно воспользоваться теоремой косинусов для треугольника AMB . Единственное осложнение возникает из-за необходимости выразить $\cos A$ через линейные элементы. Можно поступить иначе: записать теорему косинусов для треугольника AMO , имеющего с AMB общий угол A , и $\cos A$ исключить.

5.4. Два треугольника AMB и BMC , имеющие общую сторону BM , равновелики тогда и только тогда, если их высоты, опущенные из вершин A и C на общую сторону BM , равны.

Задача свелась к построению прямой, проходящей через точку B и равноудаленной от двух данных точек A и C .

Существуют две и только две прямые, проходящие через точку B и равноудаленные от точек A и C : одна—параллельная AC , другая проходит через середину AC .

5.5. Если прямые AB и CD пересекаются в точке N , то отрезки AB и CD следует перенести в эту точку, двигая каждый по своей прямой. После этого задача сведется к предыдущей (см. задачу 5.4).

Если прямые AB и CD параллельны, то отрезки AB и CD удобно расположить так, чтобы их центры лежали на общем перпендикуляре. Этот перпендикуляр остается разделить в отношении $CD:AB$.

5.6. Пусть MN — отрезок длины l , E — его середина, а длина отрезка OO_1 равна a (рис. 11.5.6). Если спроектировать точку E на плоскость нижнего основания, то легко вычислить длину отрезка GO , равного отрезку EF .

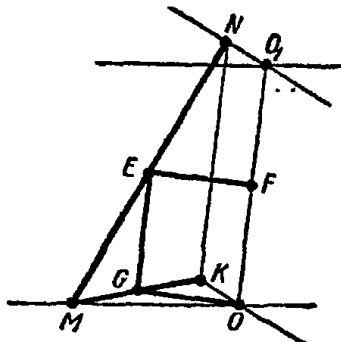


Рис. 11.5.6.

Поскольку длина отрезка GO , равного отрезку EF , не зависит от расположения отрезка MN , то точка E лежит на окружности радиуса EF с центром в точке F . Остается установить обратное предложение и вспомнить о том, что отрезок MN не должен находиться вне куба.

6.1. Воспользоваться тем, что $p-1$, p , $p+1$ — три последовательных числа, причем p — простое, большее трех.

6.3. Если $n=2k+1$, то $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-\dots+b^{n-1})$.

6.4. Среди этих же чисел будет $\left[\frac{125}{2}\right]=62^1$, делящихся на $8=2^3$ и т. д.

6.5. Так как сумма цифр числа делится на 81, то естественно предположить, что оно делится на 81. Однако такой признак делимости не был доказан в курсе арифметики, и поэтому придется дважды воспользоваться признаком делимости на 9. Для этого удобно разбить цифры числа на 9 групп, каждая из которых делится на 9.

6.6. Если многочлен n^4+4 разложен на множители второй степени, то он может быть простым числом только в том случае, если один из множителей равен единице.

6.7. Чтобы убедиться, что числитель всегда делится на число, стоящее в знаменателе, его придется разложить на множители.

6.8. Первый способ. Предположим, что данная дробь сократима. Тогда

$$5x+7=qr, \quad 2x+3=pr.$$

Рассматривая эти равенства как систему уравнений относительно x , исключим x .

Второй способ. Рассмотреть вместо данной дроби обратную и выделить целую часть.

6.10. Пример дальнейших рассуждений: при умножении цифры c на 3 мы должны получить число, оканчивающееся на 1. Это возможно лишь при $c=7$.

7.1. Вынести в числителе $\sqrt{n-2}$, а в знаменателе $\sqrt{n+2}$. После этого дробь сократится.

7.2. Трехчлен $1+x-x^2$ является общим множителем знаменателей дробей в первой скобке.

¹⁾ $[x]$ — целая часть числа x .

7.3. Последнее слагаемое нужно преобразовать отдельно, после чего его можно будет объединить с первыми двумя.

7.4. Поскольку степень каждого члена числителя вдвое больше степени соответствующего члена знаменателя, то дробь целесообразно умножить на выражение, сопряженное знаменателю.

7.6. Преобразовать подкоренные выражения, прибавив и вычтя из них единицу. При извлечении корня использовать условия задачи.

7.7. Можно воспользоваться формулой сложного радикала

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

7.9. В скобках образуется сумма из девяти одночленов. Объединить их по три так, чтобы у каждой группы был множитель $x^2 + xy + y^2$.

7.10. Первый способ. По тем же соображениям многочлен будет делиться и на $y - z$. Частное от деления данного многочлена на $(x - y)(x - z)(y - z)$ обозначим через M .

Второй способ. Так как $a + b = -c$, то $(a + b)^5 + c^5 = 0$. Разложив $(a + b)^5$ по формуле бинома Ньютона, получим выражение для $a^5 + b^5 + c^5$, которое легко представить в виде произведения линейных множителей и трехчлена $a^2 + ab + b^2$.

Первый способ. Убедитесь в том, что M — однородный многочлен второй степени относительно x , y и z . Помимо этого M симметричен относительно x , y и z . Это значит, что M нужно искать в виде

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + xz + yz).$$

Остается воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Второй способ. Трехчлен $a^2 + ab + b^2$ раскладывается на комплексные множители путем выделения полного квадрата (см. задачу 7.9).

7.11. Возвести левую часть, равную z , в куб, воспользовавшись формулой

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y),$$

где $x + y = z$.

7.12. Равенство $a + b = -c$ возвести в куб, а равенство $a + b + c = 0$ дважды возвести в квадрат. Полученные таким образом соотношения учесть при преобразовании левой части равенства, которое нужно доказать.

7.13. Итак, можно безболезненно рассмотреть лишь случай $x \geq 0$, y — любое. Его придется разбить на два случая:

$$|y| \leq x \quad \text{и} \quad |y| > x.$$

В последнем случае $\sqrt{x^2 - y^2} = i \sqrt{y^2 - x^2}$.

8.2. Перемножить первую скобку с третьей, а вторую с четвертой.

8.5. Полученное тождество справедливо при всех значениях x , в частности при $x = i$.

8.6. Подставить корень $1 + \sqrt{3}$ в данное уравнение и воспользоваться тем, что сумма рационального и иррационального числа

равна нулю тогда и только тогда, если (рациональные) коэффициенты при рациональной и иррациональной частях равны нулю одновременно.

8.7. Так как все коэффициенты уравнения — рациональные числа, то наряду с корнем $\sqrt{3}+1$ должен существовать корень вида $k(\sqrt{3}-1)$, где k — рациональное число. Докажите, что $k=-1$.

8.8. Теоремы Виета недостаточно, так как уравнение в этом случае может вовсе не иметь действительных корней.

8.11. Приравнять остаток нулю и потребовать, чтобы квадратный трехчлен, получившийся в частном, был положителен, т. е. имел отрицательный дискриминант.

8.12. В полученном тождестве следует выбрать $x=2$ и $x=3$. Получим два уравнения относительно a и b .

8.13. Записать x^4+1 в виде произведения квадратных трехчленов с неопределенными коэффициентами, раскрыть скобки и воспользоваться условием равенства двух многочленов.

8.14. Многочлен делится на y^3 , если его свободный член и коэффициенты при y и y^2 равны нулю.

8.15. Так как $x=1$ не является корнем данного многочлена, то вместо трехчлена x^2+x+1 можно рассматривать двучлен x^3-1 .

Так как $\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$, то для x^n удобно рассмотреть

случаи $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$.

8.16. Воспользоваться условием тождественного равенства двух многочленов.

9.3. Один способ — дополнить левую часть до полного квадрата, второй — обозначить второе слагаемое через u^2 и перейти к системе.

9.4. При возведении в куб воспользоваться формулой куба суммы в виде $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Выражение $a+b$ заменить правой частью данного уравнения.

9.6. Если ввести новое неизвестное $p=u+v$, то с помощью уравнения $u-v=1$ можно будет через p выразить как u , так и v . Это поможет решить второе уравнение системы.

9.7. Из системы, полученной в результате замены, исключить свободные члены. Это приведет к уравнению, левую часть которого легко разложить на множители.

9.8. В качестве вспомогательного неизвестного удобно выбрать $\sqrt{a+x}=y$.

9.9. Найти x и сделать проверку. Обратит внимание на то обстоятельство, что разность, стоящая в левой части данного уравнения, всегда положительна.

9.10. Вторым путем удобнее, так как не приходится решать неравенство с параметром β , что значительно упрощает исследование.

9.14. Первое уравнение задает квадрат с центром в начале координат и с диагоналями, равными по длине 2, расположенными на координатных осях.

9.15. Ввести новые неизвестные: $x + \frac{1}{x} = u$, $y + \frac{1}{y} = v$.

9.16. В первое и второе уравнения входит разность $y - z$. Ее-то и следует исключить из этих уравнений.

9.17. Сумму $x^4 + y^4$ в третьем уравнении удобно выразить через $x^2 + y^2$ и xy . В результате придем к уравнению относительно z .

9.18. Уравнение $x + y = 1 - z$ позволит также упростить выражение, оказавшееся в скобках после того, как в третьем уравнении был вынесен за скобку множитель $1 - z$.

9.19. Зная $x + y$ и xy , легко выразить через них $x^3 + y^3$, что и позволит ответить на вопрос задачи.

9.20. Умножить первое уравнение на xy^2z^2 , а второе на x^2yz^2 . Будет ли нарушена при этом равносильность?

9.22. Умножить каждое из первых трех уравнений на t и вычесть из последующего. Нарушится ли при этом равносильность?

9.23. Возвести первое уравнение в квадрат и вычесть его из второго. Из полученного уравнения исключить z , воспользовавшись сначала третьим, а затем первым уравнениями.

Чтобы осуществить эту операцию, первое уравнение нужно предварительно умножить на y .

9.24. Почленно сложить каждые два уравнения: первое и второе, первое и третье, второе и третье. Из найденной системы получить уравнение относительно $u = xyz$.

Чтобы получить уравнение относительно $u = xyz$, достаточно перемножить полученные уравнения.

9.25. Каждое уравнение — квадратное относительно соответствующего x_i . Решив все эти квадратные уравнения и сложив их решения, мы получим уравнение относительно s . Гарантировать равносильность при этом нельзя, но в условии задачи требуется найти только одно решение.

9.26. Если обозначить $7x - 11y = u$, то отсюда можно выразить x через u и y . Таким образом, мы получим снова систему двух уравнений с двумя неизвестными. Из этой системы легко исключить y .

9.27. Из такой системы можно исключить y , одновременно избавляясь от иррациональностей: нужно возвести оба уравнения в квадрат и вычесть второе из первого.

9.28. Выразить $\sqrt{z^2 + x^2}$ и $\sqrt{x^2 - z^2}$ через x и сравнить получающиеся в результате выражения для z^2 .

9.29. Полученная после возведения в квадрат система уравнений позволяет легко определить $u = v$, а затем u и v .

При определении u и v при последующем вычислении x и y нужно провести исследование. В результате будут использованы условия $a > b > 0$ и $a + b < 1$, а также введенные при возведении в квадрат ограничения $x > 0$, $y > 0$.

9.30. Наряду с решением x_1, y_1, z_1 у системы обязательно есть решение $-x_1, -y_1, z_1$. Таким образом, для единственности решения системы необходимо, чтобы эти два решения совпали.

Условие совпадения симметричных решений приведет к системе относительно a и b . Каждое из полученных значений a и b нужно проверить, так как мы воспользовались лишь необходимым условием единственности решения системы.

9.31. Подставив в первое и второе уравнения $y = -x$, мы получим два линейных уравнения относительно x^3 . Выразить из каждого уравнения x^3 и приравнять эти два выражения.

Предыдущие рассуждения позволяют ограничить число рассматриваемых значений параметра a . Остается проверить, выполняются ли для каждого из оставшихся значений остальные условия задачи.

9.32. В качестве фиксированного значения b удобно выбрать $b=0$. Мы приходим к системе, из которой легко определить все возможные a .

Найденные значения a необходимо проверить.

9.33. Система имеет только одно решение лишь в том случае, если $x=0$. Положив $x=0$, $y=y_1$, мы получим систему уравнений относительно y_1 и a .

Значения a , найденные в результате решения системы, необходимо проверить.

9.34. После исключения $\sqrt{x^2+1}$ получится уравнение

$$\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + y^2 + 2x - 2y = 3.$$

Его не следует преобразовывать в уравнение четвертой степени. Если в качестве вспомогательного неизвестного z взять некоторое выражение, содержащее x и y , то получится квадратное уравнение относительно z .

10.1 Ввести обозначения $a=1+k$ и $b=1-k$.

10.2. Первый способ. Привести $x+y$ к виду, удобному для логарифмирования, и найти максимум и минимум.

Второй способ. Оценить $2xy$, а затем, с помощью данного равенства, и $(x+y)^2$.

10.3. Первый способ. Воспользоваться тем, что $c>a$ и $c>b$, и оценить каждое слагаемое.

Второй способ. Применить свойство показательной функции, приняв во внимание, что $a<c$, $b<c$.

10.5. Использовать условие $a+b+c=1$, чтобы убедиться, что неравенство будет обязательно строгим.

10.7. В предположении, что $0<a\leq b$, разделить обе части неравенства на b . Получится эквивалентное неравенство, которое легко вывести из известного свойства показательной функции.

10.8. Применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим к произведению каждых двух чисел, равностоящих от концов в выражении $n!$.

10.9. Первый способ. В неравенстве $(1-u)(v-1)>0$ (см. указание I на стр. 117) раскрыть скобки и воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим чисел uv и w .

Второй способ. Воспользоваться неравенством $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} > 2$ (сложить его с полученным в указании I).

10.10. После упрощений перенести все члены в одну часть и представить ее в виде суммы квадратов.

10.12. Зная выражения $y+z$ и yz через x , можно записать квадратное уравнение с коэффициентами, зависящими от x , корнями которого будут y и z .

10.13. Выразив $y+z$ и yz через x , приходим к квадратному уравнению, коэффициенты которого зависят от x . Поскольку в условии сказано, что x , y и z — действительные числа, дискриминант полученного уравнения не должен быть отрицательным.

Найденные границы изменения x , в силу симметрии данных уравнений, распространяются на y и z .

10.15. Чтобы данный трехчлен был отрицательным внутри некоторого отрезка, необходимо и достаточно, чтобы на концах отрезка он принимал неположительные значения.

10.16. Доказать, что условие $a > 0$ несовместно с требованием, в силу которого оба корня больше a .

10.17. Так как $k \neq 0$ (иначе данное уравнение теряет смысл), то парабола должна иметь один корень в интервале $(-1, +1)$, а другой — вне этого интервала.

Такое расположение параболы имеет место тогда и только тогда, когда значения трехчлена в точках -1 и 1 противоположны по знаку.

10.18. Если ветви параболы будут направлены вверх и, кроме того, парабола не будет пересекать положительную полуось Ox , то мы получим расположение параболы, необходимое и достаточное для выполнения условия задачи.

10.22. Числитель и знаменатель полученной дроби должны иметь разные знаки. Приходим к совокупности двух систем.

10.23. Неотрицательный множитель можно отбросить, исключив точки, в которых он обращается в нуль. Оставшееся неравенство удобно привести к виду, в котором правая и левая части неотрицательны, и возвести в квадрат с учетом соответствующих ограничений.

10.24. При $x > 0$ данное неравенство можно возвести в квадрат (учтя соответствующие ограничения), так как обе его части положительны. При $x < 0$ неравенство исследуется аналогично.

10.25. Составить квадратное неравенство относительно

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{x+7}.$$

10.26. Нельзя забывать о том, что под корнем должно стоять неотрицательное число, в то время как само a может быть и отрицательным.

10.27. Данное неравенство можно переписать в виде

$$2^{2x} \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}$$

Поделив на $2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x$, получим неравенство, сводящееся к квадратному.

10.29. Используя свойство, сформулированное в указании I, заменим данное неравенство равносильной ему совокупностью двух систем неравенств.

10.30. Обратим внимание на то, что $x^6 - 2x^3 + 1$ — полный квадрат.

10.31. Нужно рассмотреть два случая, в зависимости от расположения a относительно единицы.

10.32. Если обозначить $\lg x = y$, то получим неравенство третьей степени относительно y , левая часть которого делится на $y^2 + 1$.

10.35. Равносильность не нарушится, так как x останется положительным и не сможет стать равным единице, поскольку $\log_2 x$ будет стоять множителем в знаменателе.

10.36. Обозначив $\log_2(2^x - 1) = y$, можно привести это неравенство к квадратному.

10.38. После решения алгебраического неравенства нужно вернуться к прежним обозначениям. При этом приходится рассмотреть различные случаи в зависимости от величины a .

10.39. Обозначить $\log_k x$ через y , после чего получится неравенство относительно y , которое решается методом интервалов.

10.40. Так как под знаком логарифма стоит число $4^x - 6$, то x не может быть меньше единицы.

10.41. Разобрать случаи, позволяющие раскрыть знаки абсолютных величин. Таких случаев будет четыре.

10.42. Если заметить, что $x > \frac{5}{4}$, то это избавляет от необходимости рассматривать второй случай.

10.44. Перейти от неравенств между функциями к неравенству между аргументами и учесть необходимые ограничения.

10.47. Известно, что при неположительном дискриминанте знак квадратного трехчлена не может быть противоположен знаку старшего коэффициента. Если же дискриминант положителен, то такие точки всегда найдутся.

11.1. Остается заметить, что $\lg 2 + \lg 5 = 1$.

11.3. Привести уравнение к равенству степеней с одинаковыми показателями.

11.4. Обратит внимание на тот факт, что поскольку $y = 3 - (x - 2)$, то $0 < y \leq 1$.

11.6. Если прологарифмировать данное уравнение по основанию десять, то придем к квадратному уравнению относительно x . Это уравнение будет иметь сложные коэффициенты, а потому для его решения удобнее использовать корень $x = 2$, который легко угадать.

11.7. Если обе части уравнения разделить на $2 + \sqrt{3}$, то придем к квадратному уравнению относительно $y = (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x}$.

11.8. Совсем нетрудно найти один корень уравнения. Затем нужно попытаться доказать, что других решений нет.

Корнем будет $x = 2$. Докажите, что других корней нет, используя монотонность показательной функции.

11.10. Левую часть выразить через $y = \log_3(3^x - 1)$.

11.11. Можно обозначить $\log_x 7 = y$, но удобнее использовать другое обозначение. Какое — станет ясно, если дополнить правую часть до полного квадрата (суммы или разности?).

11.14. Когда мы заменим $\log_x 4 \cdot \log_4 x$ единицей, получим уравнение, которое может иметь посторонний корень $x = 1$. Поскольку

в дальнейшем нам придется потенцировать, что снова может повлечь приобретение посторонних корней, решение необходимо закончить проверкой.

11.15. При переходе к логарифмам с основанием x мы можем потерять корень. Какой?

11.16. Чтобы воспользоваться формулой модуля перехода, нужно умножить обе части уравнения на $\log_2(3+x)$.

11.17. Если умножить уравнение на выражение, стоящее в знаменателе, то нужно потребовать, чтобы последнее не обращалось в нуль, т. е. $|x^2+x-1| \neq 1$. При потенцировании же появится еще одно ограничение.

11.18. Теперь с помощью тождества, эквивалентного определению логарифма, данное уравнение можно свести к квадратному относительно $x^{\log_b a}$.

11.19. Нужно помнить, что $\sqrt{c^2} = |c|$, и разобрать несколько случаев, предварительно оценив из условия $\log_a x$ и a . Для оценки a удобно воспользоваться неравенством $t + \frac{1}{t} \geq 2$ при $t > 0$.

11.20. Первое из уравнений, полученных после логарифмирования, разделить на второе и затем произвести потенцирование.

11.21. Нужно заметить, что $243 = 3^5$, $1024 = 2^{10}$. Теперь из второго уравнения системы с помощью первого нетрудно получить уравнение относительно $\left(\frac{2}{3}\right)^y$.

11.22. Для того чтобы найти $\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$, можно второе уравнение возвести в степень $3/2$ и полученное выражение использовать для подстановки в первое уравнение системы.

11.23. Выразить 11^{xz} , 11^z и $11^{(x-1)z}$ через $5^{\frac{y}{2}}$ и подставить в тождество, записанное в первом указании (см. стр. 121).

11.24. Если в левой части второго уравнения вынести за скобки 2^{x+2y} , то в скобках останется выражение, аналогичное левой части первого уравнения. Его можно заменить числом 2.

11.25. Здесь удобно не заботиться о равносильности, а каждый раз получать следствия. Алгебраическая система, которая будет получена, легко сводится к уравнению относительно $u = y/x$. Для этого нужно будет почленно перемножить входящие в нее уравнения.

11.26. При преобразовании выражений, входящих в первое уравнение (после подстановки), нужно будет воспользоваться определением логарифма.

11.27. Так как $xy = 3$, то либо x , либо y больше единицы. Мы убедились, что x и y положительны. Следовательно, $x+y > 1$ и

$$|\log_2(x+y)| = \log_2(x+y).$$

Остается рассмотреть два случая в зависимости от знака $\log_2(x-y)$.

11.29. Воспользоваться математической записью определения логарифма:

$$a^{\log_a b} = b.$$

11.30. Определив x , следует использовать его для упрощения третьего уравнения системы. Если третье уравнение преобразовать в алгебраическое, то посмотрите, что при этом может произойти — потеря или приобретение корней.

12.2. Доказательство следует начать с очевидного тождества

$$\operatorname{tg} [(30^\circ - \alpha) + (60^\circ - \alpha)] = \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

12.3. Воспользоваться тем, что

$$\operatorname{ctg} x' = \frac{1}{2} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right).$$

12.6. Вычислить произведение синусов несколько труднее. Удобнее пойти квадрат этого произведения, записав $2 \sin^2 \frac{\pi}{7}$

как $1 - \cos \frac{2\pi}{7}$ и т. д.

12.7. Разделить числитель и знаменатель выражения, стоящего в правой части, на Bb .

12.8. Если заменить $\sin^2 x$ на $k^2 \sin^2 y$, то $\sin^2 y$ можно вынести за скобки.

12.9. Выразить $a^2 + b^2$ через $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

12.10. Обозначить $\sin^2 \alpha = a$, $\sin^2 \beta = b$, $\sin^2 \gamma = c$ и преобразовать данное равенство, выполнив сложение.

12.11. Привести к общему знаменателю и все произведения тригонометрических функций от $\alpha + \frac{\pi}{3}$ и $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ преобразовать в сумму.

13.1. Заменить $\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ на $\sin x + \cos x$, после чего объединить все одночлены, содержащие $\cos 3x$, и все оставшиеся одночлены уравнения. Это поможет получить распадающееся уравнение, у которого в правой части нуль, а левая разложена на множители.

13.2. Если левую часть представить в виде $\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x}$, то получим распадающееся уравнение, которое нужно решать, следя за равносильностью.

13.3. Левую часть уравнения записать в виде $\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x}$, перенести все в одну часть и вынести $\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$ за скобки.

Оставшееся в скобках выражение симметрично относительно $\sin x$ и $\cos x$. Если привести дроби к общему знаменателю, то должно получиться достаточно простое выражение, поскольку все подобные члены будут иметь разные знаки.

13.4. Найти такие решения уравнения $\sin 2x \sin 7x = \cos 2x \cos 7x$, при которых $\cos 2x \cos 7x \neq 0$.

13.5. Замена $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ приведет к появлению $\operatorname{tg} x$ множителем в числителе. Однако $\operatorname{tg} x$ не может быть равным нулю.

13.6. Воспользоваться формулой разности тангенсов и заменить полученное уравнение эквивалентной ему, состоящей из нового уравнения и ограничений.

13.7. Множитель $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ входит в правую часть уравнения.

Чтобы обнаружить это, достаточно заменить $\cos x$ на $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и привести правую часть к виду, удобному для логарифмирования.

13.8. После приведения к виду, удобному для логарифмирования, внимательно следить за равносильностью.

13.9. Так как $\cos \frac{x}{2}$ на интервале $0 < \frac{x}{2} < \pi$ меняет знак, то этот интервал придется разбить на два: $0 < \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$.

13.10. При решении получившегося уравнения нужно правильно оценить роль параметра: если из соотношения исчезает неизвестное и остается только параметр, то при данном значении параметра неизвестное может принимать любое значение из области определения данного уравнения.

13.11. Выбор значений x , попадающих в интервал $0 \leq x \leq 2\pi$, удобнее осуществить, если при решении мы постараемся воспользоваться арккосинусами, областью значений которых является указанный интервал.

13.12. Под радикалом стоит полный квадрат. Помните, что $\sqrt{a^2} = |a|$.

13.13. Остается заметить, что $\operatorname{tg} x + \sin x = \operatorname{tg} x (1 + \cos x)$, а $\operatorname{tg} x - \sin x = \operatorname{tg} x (1 - \cos x)$. Оба эти выражения входят слагаемыми в степени $1/2$. Множитель $\operatorname{tg}^{1/2} x$ входит и в третье слагаемое. Этот множитель можно вынести за скобки, так как $1 + \cos x$ и $1 - \cos x$ никогда не станут отрицательными, а следовательно, равносильность в результате этого действия не нарушится.

Получаем: уравнение вида

$$\operatorname{tg}^{1/2} x \varphi(x) = 0,$$

где $\varphi(x)$ имеет смысл всегда. Это уравнение равносильно совокупности уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ и системы

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0. \end{cases}$$

(В ограничении взято строгое неравенство, так как случай $\operatorname{tg} x = 0$ учтен раньше).

13.14. Чтобы произвести упрощения, придется воспользоваться еще одним условным тождеством $\frac{1}{\operatorname{tg} 2x} = \operatorname{ctg} 2x$. Провести анализ равносильности и перейти в полученном уравнении к синусам и косинусам.

13.15. Когда в уравнение входят только $\sin \alpha \cos \alpha$ и $\sin \alpha + \cos \alpha$, то одну из этих величин, например вторую, можно обозначить через y , а другую выразить через y .

13.16. Перейти к функциям x и привести уравнение к однородному, домножив в $\sin x$ на тригонометрическую единицу.

13.17. Воспользоваться теоремой о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами.

13.18. Выразить правую и левую части через $y = \cos \frac{x}{2}$.

13.19. Выражение в квадратных скобках представить в виде $(1 + \operatorname{ctg} x) + \left[1 + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]$ и воспользоваться формулой суммы котангенсов. В правой части для $\cos 2x$ нужно выбрать выражение, которое позволит избавиться от стоящей в скобке единицы.

13.20. Следует помнить о том, что $\sqrt{a^2} = |a|$.

13.21. Относительно $\cos x$ получится биквадратное уравнение, решения которого придется исследовать.

13.24. Воспользоваться этой формулой еще раз, предварительно выделив выражение $1 + \cos 2x$.

Вспомнить об условиях, при которых произведение двух косинусов равно единице.

13.25. Записывая условие одновременного равенства двух косинусов единице или минус единице, следует брать разные обозначения для целочисленного переменного.

13.26. Если перенести все в правую часть, то мы сможем образовать сумму двух неотрицательных слагаемых.

13.27. Так как $\cos 3x \geq 0$, а при дополнении до полного квадрата к обеим частям уравнения прибавляется $\pm \cos x \cos 3x$, то знак правой части зависит от знака $\cos x$. Это означает, что целесообразно рассмотреть три случая: $\cos x = 0$, $\cos x > 0$, $\cos x < 0$.

Если $\cos x > 0$, то целесообразно привести левую часть к квадрату разности, а если $\cos x < 0$ — к квадрату суммы.

13.28. Поскольку минимум левой части совпадает с максимумом правой, то единственная возможность их уравнять — решить систему

$$\begin{cases} \sin ax = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

13.29. При решении системы тригонометрических уравнений приходится вводить разные целочисленные переменные.

13.31. Относительно u и v получится система уравнений, которую удобно решить заменой $v = ut$.

13.32. С помощью второго уравнения выразить y через x и подставить в первое уравнение системы.

13.33. При решении системы нам придется оба уравнения возводить в квадрат. Следовательно, в конце необходимо сделать проверку.

13.34. Получив из второго уравнения после подстановки в него найденного значения x выражение для $|y|$, нужно позаботиться о том, чтобы $|y| \geq 0$.

13.35. Из третьего уравнения $x + y = \pi - z$. Следовательно, $\operatorname{tg} z = -\operatorname{tg}(\pi - z) = -\operatorname{tg}(x + y)$.

По формуле тангенса суммы и с помощью уравнения $\operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} x$ можно выразить $\operatorname{tg} z$ через $\operatorname{tg} x$ и подставить в первое уравнение.

13.36. Получить уравнения с одинаковыми левыми частями и сравнить их. При решении квадратного уравнения обратить внимание на исследование.

13.37. Прежде чем возводить уравнения в квадрат, оставим в левой части первого уравнения $\sin x$, а в левой части второго уравнения оставим $\cos x$.

13.38. При решении уравнений возникнут арксинусы и арккосинусы, которые будут накладывать ограничения на a . Следует ли к этим ограничениям добавлять $|a| \leq 1$, $\left|a + \frac{1}{2}\right| \leq 1$, что вытекает непосредственно из условия?

13.39. Оценив правую и левую части уравнения, обнаружим, что равенство возможно лишь в случае, если обе равны четырем. В результате уравнение сводится к системе. В частности, следует обратить внимание на то обстоятельство, что левая часть равна 4 лишь при $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = 1$.

13.40. Первый способ. Преобразовать уравнение в сумму квадратов и заменить системой.

Второй способ. Уравнение преобразуется к сумме двух неотрицательных выражений, которая равна нулю. В результате получим систему

$$\begin{cases} 2 \sin x = \sin^2 3x, \\ \sin^2 3x = \sin^4 3x. \end{cases}$$

13.41. Первый способ. После преобразования данное уравнение примет вид

$$4 \cos^3 \frac{x+y}{2} - 4 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} + 1 = 0.$$

Первые два члена дополнить до полного квадрата и получить сумму неотрицательных слагаемых, которая равна нулю.

Второй способ. Уравнение можно записать в виде

$$(1 - \cos x) \cos y + \sin x \sin y = \frac{3}{2} - \cos x$$

и рассмотреть левую часть как однородное выражение относительно $\sin y$ и $\cos y$. Остается оценить выражение $A \cos y + B \sin y$ и правую часть уравнения.

13.42. Первый способ. Обозначив $\operatorname{tg} x = z$, $\operatorname{tg} a = c$, мы придем к выражению, которое должно быть тождеством относительно x . Остается вспомнить условие тождественного равенства двух многочленов.

Второй способ. Так как равенство

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} (a-x) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} (a-x) = b$$

должно выполняться тождественно, т. е. при всех x , то оно должно быть верным и для конкретных значений x , например при $x=0$ и $x=\frac{\pi}{4}$. Найденные в результате значения a и b нуждаются в проверке.

13.43. На первый взгляд кажется естественным воспользоваться оценкой

$$\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \geq 2, \quad \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 2.$$

Однако это очень грубая оценка. В самом деле, если для одного из выражений достигается равенство, то другое обращается в бесконечность.

Следовательно, нужно преобразовать левую часть уравнения так, чтобы $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ не были разъединены. С этой целью удобно раскрыть скобки и заменить

$$\sin^4 x = \frac{1}{4} (1 - \cos 2x)^2, \quad \cos^4 x = \frac{1}{4} (1 + \cos 2x)^2.$$

13.44. Левую часть выражения

$$\sin 2x - \sin x \cos 2x = \frac{3}{2},$$

к которому приводится данное уравнение, удобно рассмотреть как $A \sin 2x + B \cos 2x$, где $A=1$, $B=-\sin x$, и оценить.

14.4. Когда мы заменим $\sin 2x$ и $\cos 2x$ на их выражения через $\operatorname{tg} x$, могут быть потеряны те решения неравенства, при которых $\sin 2x$ и $\cos 2x$ существуют, а $\operatorname{tg} x$ не существует. Однако $\operatorname{tg} x$ входит в правую часть данного неравенства, а потому значения x , при которых $\operatorname{tg} x$ не существует, не могут быть решениями этого неравенства.

14.5. Первый способ. Чтобы найти секторы круга, в которых $\operatorname{tg} 2x \leq 0$, нужно вначале построить радиусы, соответствующие углам, для которых $\operatorname{tg} 2x = 0$ и $\operatorname{tg} 2x$ не существует.

Второй способ. В результате применения формулы тангенса двойного угла возможна потеря решений: из области определения выпадают точки, в которых $\cos x = 0$.

14.8. Так как коэффициент при старшем члене положителен, то знаки корней зависят от знака свободного члена.

14.10. Найти те значения k , при которых полученное неравенство осуществимо.

14.11. Воспользоваться тем, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, и решить неравенство относительно $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

14.12. Произведение $\cos x \cos 3x$, стоящее в знаменателе, выразить через $\cos 2x$. Получится алгебраическое неравенство относительно $y = \cos 2x$.

14.13. При возведении неравенства в квадрат достаточно потребовать, чтобы $\cos x \geq 0$.

14.15. Обозначить $\sin \alpha$ через y и разложить получившийся многочлен третьей степени на множители, воспользовавшись теоремой о делителях свободного члена и первого коэффициента.

15.1. Неравенство сводится к квадратному, если положить $\log_{\sin x} 2 = y$. При этом необходимо следить за равносильностью преобразований.

15.3. Поскольку основание логарифма больше единицы, неравенство между логарифмами можно заменить таким же неравенством между $\cos x$ и $\lg x$.

15.4. Остается перейти к системе тригонометрических неравенств, равносильной логарифмическому неравенству. При этом нужно помнить, что все функции, стоявшие в условии под знаками логарифма, должны быть положительными.

15.5. Для дальнейшего нужно иметь в виду, что условие $0 < |a| < 1$ не равносильно неравенству $-1 < a < 1$.

15.6. При дальнейшем решении мы столкнемся с выбором целочисленного аргумента. Следует помнить, что мы имеем дело с $|\lg x|$, а не с $\lg x$.

15.7. Неравенство равносильно условию, что знаменатель положительен, если при этом $\arccos(x^2 - 3x + 2)$ существует и отличен от нуля.

15.8. Если $1 - x > 0$, то правая и левая части неравенства попадают в интервал от 0 до $\frac{\pi}{2}$, который является общим интервалом монотонности для тангенса и косинуса.

Если взять косинус от правой и левой частей неравенства, а знак неравенства изменить на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

16.3. При исследовании нужно помнить, что отрицательное число в дробной степени не имеет для нас смысла.

16.4. Решив простейшее тригонометрическое уравнение, получим показательное уравнение, которое нужно исследовать, в зависимости от значений, принимаемых целочисленным аргументом.

16.5. Вспомнить, когда произведение синусов и косинусов может равняться единице.

16.7. Полученное уравнение легко решить, если записать $\sin^3 x = \sin x (1 - \cos^2 x)$. При решении распадающегося уравнения, которое получится в результате такой замены, нужно постоянно иметь в виду ограничения.

16.8. При решении удобно на время забыть о возникающих ограничениях, а в конце проверить, для каких из найденных значений неизвестного они выполняются.

16.9. Использовать тот факт, что $x > 0$.

16.10. При исследовании полезно иметь в виду, что $\cos x \leq 1$ и дискриминант квадратного уравнения не должен быть отрицательным.

16.11. Удобно отдельно рассмотреть случаи $a \leq -1$, $a \geq 1$, когда данное уравнение имеет неотрицательный дискриминант.

16.12. Вы должны получить систему, состоящую из двух уравнений, трех неравенств и двух ограничений $\neq$.

17.2. Выделить действительную часть и приравнять нулю.

17.3. Записать $z^2 - z$ в тригонометрической форме: $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Помнить, что r должно быть неотрицательным, а выражения $\cos \alpha - i \sin \alpha$, $\sin \alpha - i \cos \alpha$, $\sin \alpha + i \cos \alpha$ и т. п. не представляют собой тригонометрической формы какого-либо комплексного числа.

17.4. Воспользоваться формулой Муавра, после чего разобрать случаи, позволяющие определить знак числа, абсолютная величина которого будет модулем комплексного числа z .

17.5. В условии сказано, что число z мнимое. Использовать этот факт для дальнейших рассуждений.

17.6. Данное уравнение можно использовать, возведя обе его части в любую нужную нам степень.

17.7. После того как найдена величина $|z|$, можно вспомнить, что $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Вместе с равенством $\bar{z} = z^{n-1}$ это позволяет найти z .

17.8. Полученная система оказывается распадающейся.

17.9. Найденные значения для z и w взять во всевозможных комбинациях и проверить.

18.1. Этих трех уравнений достаточно, чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно из первого уравнения вычесть поочередно второе и третье.

18.2. Найти минимум P .

18.4. Легко доказать, что $x = y$. В самом деле, первый и второй поппоны потратили на весь путь равное время, т. е.

$$\frac{x}{u} + \frac{l-x}{v+u} = \frac{l-y}{v+u} + \frac{y}{u},$$

откуда

$$x \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v+u} \right) = y \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v+u} \right).$$

Так как $v \neq 0$, то $x = y$.

18.5. При решении уравнений нужно помнить, что x и y — цифры, а потому количество их возможных вариаций ограничено.

18.6. Цена второй части брильянта $l(p-x)^2$. Остается сравнить цену двух частей с ценой целого брильянта.

18.7. Удобнее ввести в рассмотрение нормы расхода горючего, отнесенные к часу работы двигателя, так как нормы расхода на километр пути в стоячей воде пришлось бы пересчитывать на нормы для движения против течения.

18.8. Решать систему уравнений нужно методом исключения. При этом последнее уравнение будет содержать два неизвестных,

одним из которых должно быть s . Использовать условие $y > s$ и решить это уравнение в натуральных числах.

18.9. Остается разобрать все возможные случаи получения 5 копеек с помощью наборов монет разного достоинства. Если учесть ограничение, что десятикопеечных монет на 4 штуки больше, чем всех остальных, то придем к выводу, что из медных монет у школьника могут быть только пятак.

18.10. На путь AC — вниз по течению пароход тратит $40 - \frac{x}{2}$ часов, а на тот же путь вверх по течению у него уходит $48 - \frac{x}{2}$ часов. Это позволяет найти скорость течения.

18.11. В качестве неизвестных удобно выбрать скорости пловцов и расстояние AC .

18.12. Если раствор занимал первоначально x -ю часть сосуда, то чистой кислоты в нем было $\frac{xp}{100}$, а долили $(1-x) \frac{q}{100}$ чистой кислоты. Концентрация полученного таким образом раствора равна

$$p_1 = px + (1-x)q.$$

Мы получили рекуррентную формулу для p_k — концентрации после k циклов. Остается выразить p_k через p .

18.13. Чтобы вычислить расстояние между пунктами первой и второй встречи, нужно сначала определить время между этими двумя встречами, т. е. разделить длину отрезка между пунктом первой встречи и пунктом B на сумму скоростей. Полученное выражение нужно умножить на скорость автомобиля. В результате получим уравнение

$$\frac{zux}{(x+y)^2} = \frac{2}{9}z,$$

т. е.

$$\frac{yx}{(x+y)^2} = \frac{2}{9}.$$

Два уравнения, в которых используются оставшиеся условия задачи, составить нетрудно. Одно из них будет линейным, а другое — уравнением второй степени.

Решение системы трех уравнений рациональнее начать с решения относительно $\frac{x}{y}$ уравнения, полученного во втором указании.

18.14. Стоимость автобусного билета (A) может быть использована только для того, чтобы определить расстояние до встречи с поездом, которое пассажиру пришлось бы проехать на такси. Эта поездка обошлась бы ему в $A + ax - B$ рублей и пройденное машиной расстояние составило бы $\frac{ax + (A - B)}{a} = x + \frac{A - B}{a}$ километров.

Условие задачи позволяет составить три уравнения, приравнявая различные выражения для одинаковых отрезков времени: а) время, которое заняла поездка сначала на такси, а затем на автобусе, равно времени, израсходованному поездом на тот же путь за вычетом t ; б) если бы пассажир догонял поезд на такси, то догнал бы его на расстоянии $x + \frac{A-B}{a}$ километров; в) остается использовать разность времен, которые входят в а) и б), и приравнять ее t .

18.15. Условия задачи позволяют составить два уравнения, которые получатся в результате сравнения времени, израсходованного каждым поездом на весь путь без остановки, с временем, израсходованным на этот же путь с остановкой и последующим увеличением скорости.

Прежде чем решать полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными, нужно выразить через введенные неизвестные и ту величину, которая нас интересует.

18.16. Для решения задачи нам понадобятся два уравнения, которые мы получим, приравнявая промежутки времени до первой и второй встреч. Тот факт, что самолет вернулся в A , а вертолет прилетел в B , мы используем после того, как определим их скорости. Это позволит нам вычислить нужные отрезки времени для ответа на вопрос задачи.

18.17. Составить два уравнения относительно x и y нетрудно. Достаточно записать, чему равно время на путь от M до N и на путь от N до M , и вспомнить, что обе эти величины известны.

19.1. Свести задачу к сравнению $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ и числа 2.

19.2. Нужно использовать условие, в силу которого a_p, a_q, a_r и a_s образуют геометрическую прогрессию. Это удобнее сделать так: $a_q^2 = a_p a_r$ и т. п.

Остается выразить $p-q$, $q-r$ и $r-s$ через a_p, a_q, a_r и a_s и убедиться, что $(p-q)(r-s) = (q-r)^2$.

19.3. При составлении разностей $a-b$, $b-c$ и $c-a$ удобнее пользоваться представлением чисел a, b и c с помощью арифметической прогрессии.

19.4. Воспользоваться тем, что $\log_x \frac{b}{a} = \log_x \frac{c}{b}$ (числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию).

19.5. Вынести за скобки $\frac{7}{9}$.

19.6. Под знаком квадратного корня стоит полный квадрат $\frac{1}{9}(10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1)$.

19.7. После исключения a_2 получим уравнение относительно a_1 и a_3 , из которого следует, что $a_1 = a_3$.

Так как $a_1 = a_3$, то $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = a_1$. Рассмотрите систему:

$$a_1 = a_2, \quad a_2 = a_3.$$

19.9. Теорема Внета, записанная для данного уравнения, приведет к системе уравнений относительно x_1 и q (уравнение, в которое входит a , можно не рассматривать). Удобнее найти сначала q .

19.10. Записать произведение n первых членов и воспользоваться тем, что $a_1 = \sqrt{2}$.

19.11. Если цифру сотен обозначить через a , а разность прогрессии через d , то число делится на пять, когда либо $a + 2d = 0$, либо $a + 2d = 5$; оно же делится на девять, если $a + (a + d) + (a + 2d)$ делится на девять. Остается воспользоваться тем, что a , $a + d$ и $a + 2d$ — цифры.

19.13. В задаче спрашивается, сколько комбайнов было в совхозе. Эту величину мы обозначим через n . Условия задачи позволяют составить три уравнения. При этом левая часть уравнения, соответствующего работе по плану, представляет собой сумму членов арифметической прогрессии.

При решении системы уравнений нужно исключить x и y .

19.14. При решении уравнений нужно иметь в виду, что нас интересуют только a и q .

19.15. Двух уравнений достаточно для решения задачи, так как нас интересуют не сами числа a , b и c , а отношение каких-либо двух из них. Поскольку полученные в результате использования условий задачи уравнения однородны относительно a , b и c , то определить интересующую нас величину нетрудно.

19.16. Так как предел $\frac{1}{4^n}$ при $n \rightarrow \infty$ равен нулю, то a_n и b_n имеют общий предел.

20.1. Воспользоваться оценкой

$$\frac{1}{(1+k)^2} < \frac{1}{(1+k)k}.$$

20.2. Воспользоваться тем, что $\frac{d}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}$.

20.4. Умножить правую часть на $a - 1$ и привести ее к виду $a^{2^{k+1}-1}$.

20.5. Разбить полученную сумму на три алгебраических слагаемых: $2n$, произведение n на сумму чисел от 1 до $n-1$ и сумму квадратов этих же чисел.

20.6. Бесконечная геометрическая прогрессия имеет сумму, если она бесконечно убывающая, т. е. $|2x| < 1$.

20.8. Рассмотреть разность $S_n - S_n x^2$, в которой выделить геометрическую прогрессию.

20.9. Полученные равенства сложить и воспользоваться известными формулами для S_n , S_n^2 , S_n^3 .

20.10. Подсчитайте число четных (нечетных) членов, стоящих до n -й группы.

20.11. Каждое слагаемое после домножения на $2 \sin \frac{\pi}{2n}$ представить в виде разности косинусов.

21.1. Так как сосед справа и сосед слева неразличимы, то можно любого из сидящих оставить на месте, а остальных попросить пересёсть на место, симметричное относительно того, кто остался на своем месте.

21.2. Обратит внимание на то, что, вычитая перестановки, в которых на первом месте стоит элемент a_1 , и перестановки, в которых на втором месте стоит элемент a_2 , мы некоторые перестановки вычтем дважды.

21.3. Поскольку в нашем распоряжении имеется семь разрядов, то выбрать места для трех двоек можно C_7^3 способами.

21.4. Число не может начинаться с цифры 0. На сколько больше чисел мы получим, если не учтем это обстоятельство?

21.5. Экскурсантов для заселения первой каюты можно выбрать C_{22}^4 способами, вторую каюту нужно заселить четырьмя из оставшихся и т. д.

21.6. Доказать, что $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

21.7. Возвести $1+i$ в n -ю степень с помощью формулы Муавра.

21.8. После упрощений мы придем к квадратному уравнению относительно n и k , которое нужно решить в целых числах. Удобнее решать это уравнение относительно k .

21.9. Все получившиеся после раскрытия скобок члены не будут подобными. Остается сосчитать их число.

21.10. Если $n-1 < k \leq 2(n-1)$, то члены, содержащие x^k , могут быть получены лишь в результате перемножения членов суммы $x^{k-n+1} + \dots + x^{n-1}$.

21.11. Мы приходим к неравенству $C_n^{k2^k} < C_n^{2^2}$, решить которое можно, придавая различные значения параметру k . В качестве таких значений удобно выбрать номера двух членов разложения, стоящих рядом с десятым членом.

21.12. Наиболее удобной является группировка

$$(x^5 + (1+x^2))^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{5(20-k)} (1+x^2)^k.$$

После того как мы применим формулу бинома к $(1+x^2)^k$, получим, что в общем члене содержится $x^{10n - (5k - 2m)}$. Остается выяснить, принимает ли $5k - 2m$ все значения от 0 до 100, и если не все, то сколько значений окажутся пропущенными. Следует иметь в виду, что $m, k = 0, 1, \dots, 20$, но $m \leq k$.

21.13. Для получения рекуррентной формулы достаточно разобрав два случая: а) в первой группе один элемент (a_1), б) в первой группе два элемента (a_1, a_2).

21.14. Чтобы получить рекуррентную формулу, связывающую M_n и M_{n+1} , где через M_n обозначен ответ задачи, нужно найти число точек пересечения $(n+1)$ -й прямой со всеми остальными. Как с этим числом связано количество вновь образовавшихся областей?

Рекуррентное соотношение будет иметь вид

$$M_{n+1} = M_n + m + n + 1.$$

22.2. После того как найдена сумма двух первых слагаемых, можно воспользоваться формулой синуса суммы, так как третье слагаемое положительно, но меньше $\frac{\pi}{4}$, и вся сумма не больше $\frac{\pi}{2}$.

22.4. Так как оба слагаемых расположены в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то все тригонометрические функции от них неотрицательны.

22.5. Воспользоваться формулами приведения с тем, чтобы под знаком арккосинуса стоял косинус, а не синус.

22.9. Если перенести $\arcsin \frac{3x}{5}$ в правую часть и взять синусы от обеих частей, то в предположении, что $x > 0$, получим уравнение, равносильное данному.

22.10. После взятия косинусов от обеих частей уравнения получится иррациональное уравнение, при решении которого возможно приобретение посторонних корней.

22.11. Так как обе части лежат в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то от обеих частей данного уравнения можно взять тангенсы, что не нарушит равносильности.

22.13. Ясно, что в результате взятия котангенсов от обеих частей равенства мы можем получить посторонние корни, так как у неравных углов могут быть равные котангенсы. Однако возможна и потеря корней, если в интервал изменения углов попадает значение $k\pi$.

23.7. Первый способ. В тождестве $\cos(x+T)^2 = \cos x^2$ удобно выбрать $x=0$ и $x=\sqrt{2}T$. Вместо второго значения можно выбрать другое иррациональное число.

Второй способ. Если у функция есть период T , то $x_1+T=x_m$, а $x_2+T=x_k$, где x_i — i -й положительный корень функции. Исключив T , получим равенство, которое нужно привести к противоречию.

23.9. Предположить, что функция имеет меньший положительный период, чем наименьшее общее кратное периодов $\cos \frac{3x}{2}$ и $\sin \frac{x}{3}$.

Записать тождество и привести его к противоречию, преобразовав разность синусов и разность косинусов в произведения.

24.1. Получившийся квадратный трехчлен можно разложить на множители. Однако такой прием исследования здесь не подойдет, так как аргумент, от которого зависит квадратный трехчлен, сам является функцией от x . Используйте другой прием для исследования квадратного трехчлена.

Выделите полный квадрат.

24.2. Данную функцию удобно записать в виде разности косинусов, поскольку в аргумент каждого синуса входит $2x$ —единственное слагаемое, зависящее от x .

24.3. Для этого вынести $\sin x \cos x$ за скобки.

24.4. $A = x + y + 1$.

24.5. Найдя наименьшее значение y в каждом из пяти интервалов, мы сравним эти значения друг с другом.

24.6. Для функции $y = x + \frac{a}{x}$ мы можем неравенство применить непосредственно и написать

$$x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}.$$

Для данной же функции нужно иметь семь слагаемых, содержащих в знаменателе x , чтобы погасить влияние x^7 .

Представить $\frac{a}{x}$ в виде суммы семи одинаковых слагаемых $\frac{a}{7x}$.

24.8. Выразить боковую поверхность как функцию только $a + b$.

24.9. Удобно ввести в рассмотрение угол α между диагональю шестигольника и диагональю квадрата. Этот угол можно будет найти из условия, что диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и должны принимать наибольшую возможную величину.

Глава 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ

1.1. Треугольник A_1BC_1 (рис. Р.1.1) правильный, так как он подобен данному треугольнику ABC . Точки B , O , C_1 и D_1 лежат на одной прямой. Чтобы найти AO_1 , нужно вычислить O_1D . Но $O_1D = O_1D_1 - DD_1$. Отрезок O_1D_1 равен трети отрезка BD_1 , как радиус окружности, вписанной в правильный треугольник A_1BC_1 . Таким образом, $O_1D_1 = \frac{2R}{3}$. Отрезок DD_1 мы найдем, если рассмотрим треугольник ABC , как вписанный в окружность с центром O :

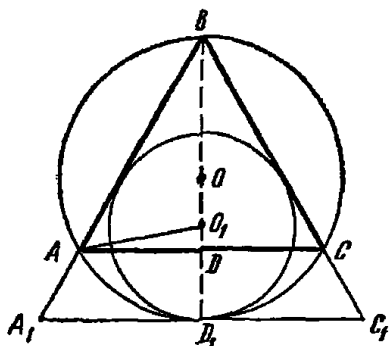


Рис. Р.1.1.

$$DD_1 = \frac{R}{2}.$$

Отсюда $O_1D = \frac{2R}{3} - \frac{R}{2} = \frac{R}{6}$. Так как $AD = \frac{1}{2} AC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, то $AO_1 = \sqrt{AD^2 + O_1D^2} = \frac{R\sqrt{7}}{3}$.

Ответ. $\frac{R\sqrt{7}}{3}$.

1.2. В треугольнике AOB (рис. Р.1.2) известны: $\angle BAO = \frac{\alpha}{2}$, $\angle AOB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$, $BO = m$. По теореме синусов

находим $AB = m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Теперь можно найти AC и $R = BO_1$:

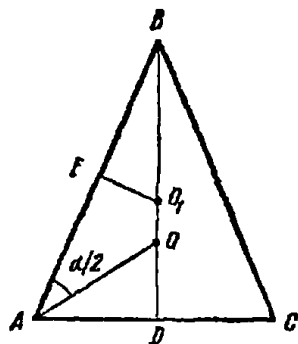


Рис. Р.1.2.

$$\begin{aligned} AC &= 2AD = 2AB \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \\ &= 2AB \cos \alpha = 2m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$R = \frac{AB}{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \frac{m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha} = \frac{m}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ.

$$AC = 2m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha, \quad R = \frac{m}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

1.3. Условие задачи может быть геометрически осуществлено в двух случаях (рис. Р.1.3а).

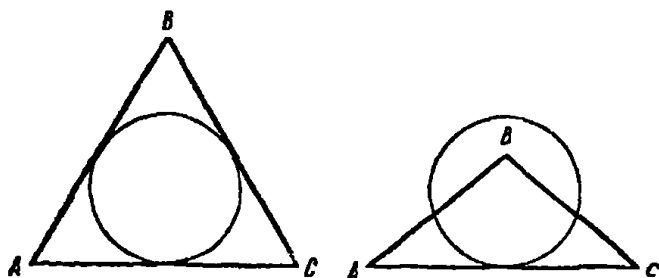


Рис. Р.1.3а.

В первом случае мы имеем дело с правильным треугольником (докажите). Однако решить эту задачу можно сразу для обоих случаев. На рис. Р.1.3б изображены треугольник ABC и треугольник $A_1B_1C_1$, составленный из средних линий первого треугольника. Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия половина. Следовательно, радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, относятся, как один к двум.

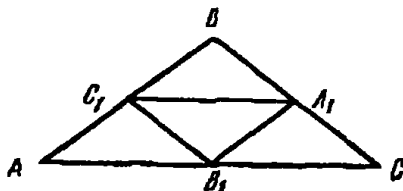


Рис. Р.1.3б.

1.4. Если сторона a треугольника ABC биссектрисой AA_1 разделена на отрезки a_1 и a_2 , то можно записать следующие соотношения (рис. P.1.4):

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a, \\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{b}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно a_1 и a_2 , получим

$$a_1 = \frac{ac}{b+c}, \quad a_2 = \frac{ab}{b+c}.$$

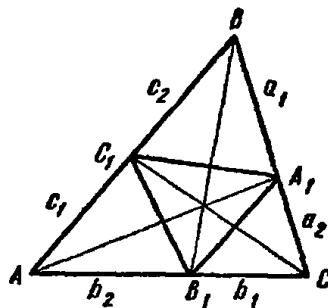


Рис. P.1.4.

Вычислим аналогично отрезки, на которые разделены стороны b и c треугольника ABC :

$$b_1 = \frac{ba}{c+a}, \quad b_2 = \frac{bc}{c+a}, \quad c_1 = \frac{cb}{a+b}, \quad c_2 = \frac{ca}{a+b}.$$

Так как отношение площадей треугольников, имеющих общий угол, равно отношению произведений сторон, между которыми лежит этот общий угол, то

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{c_1 b_2}{cb} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогично находим

$$\frac{S_{A_1BC_1}}{S_{ABC}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)}, \quad \frac{S_{A_1B_1C}}{S_{ABC}} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)}.$$

Теперь найдем отношение $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$:

$$\begin{aligned} \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} &= 1 - \left(\frac{S_{A_1B_1C}}{S_{ABC}} + \frac{S_{A_1BC_1}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} \right) = \\ &= 1 - \left(\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(a+b)(b+c)} + \frac{ab}{(a+c)(b+c)} \right) = \\ &= \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} = \frac{2pq'l}{(p+q)(p+l)(q+l)}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{(p+q)(p+l)(q+l)}{2pq'l}.$$

1.5. Выразим площадь треугольника ABC через радиус r вписанной окружности и углы A , B и C треугольника. Вначале запишем

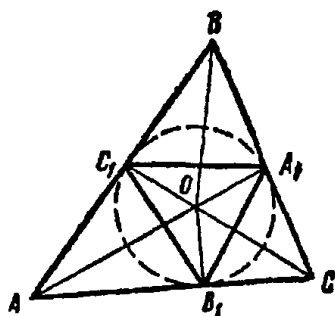


Рис. Р.1.5.

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$$

(рис. Р.1.5).

Так как

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \sin AOB,$$

где

$$AO = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}, \quad BO = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}},$$

$$\angle AOB = \pi - \left(\frac{A+B}{2} \right)$$

и, следовательно,

$$\sin AOB = \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2},$$

то

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}.$$

Аналогично находим S_{BOC} и S_{COA} и вычисляем искомую площадь:

$$S_{ABC} = \frac{r^2}{4} \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Выразим теперь через r , A , B и C площадь треугольника $A_1B_1C_1$. Разобьем и его на три треугольника:

$$\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= S_{A_1OB_1} + S_{B_1OC_1} + S_{C_1OA_1} = \\ &= \frac{r^2}{2} (\sin A_1OB_1 + \sin B_1OC_1 + \sin C_1OA_1). \end{aligned}$$

Чтобы найти угол A_1OB_1 , рассмотрим четырехугольник A_1OB_1C . В этом четырехугольнике два угла прямых, а потому два других: угол A_1OB_1 и угол C — образуют в сумме развернутый угол, т. е. угол A_1OB_1 равен $\pi - C$. Аналогично находим углы B_1OC_1 и C_1OA_1 .

Итак,

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} r^2 (\sin A + \sin B + \sin C).$$

Остается найти отношение $S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC}$.

Ответ. $2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

1.6. Так как $B = 3C$, то из соотношения между площадями мы получим

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABD}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \frac{A}{2}}{\frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \frac{A}{2}} = 2,$$

т. е. $\frac{AC}{AB} = 2$, откуда, в силу теоремы синусов, $\frac{\sin B}{\sin C} = 2$. Вспомня, что по условию $B = 3C$, придем к тригонометрическому уравнению $\sin 3C = 2 \sin C$. Домножим обе части уравнения на $\cos C$, получим $\sin 3C \cos C = \sin 2C$. Преобразовав левую часть в сумму синусов, придем к уравнению

$$\sin 4C + \sin 2C = 2 \sin 2C,$$

или

$$\sin 4C = \sin 2C.$$

Так как C — угол треугольника, меньший $\frac{\pi}{4}$ (ведь $3C$ и C — углы одного треугольника), то последнее уравнение может выполняться только в том случае, если

$$4C = \pi - 2C, \text{ т. е. } C = \frac{\pi}{6}.$$

Находим остальные углы:

$$B = 3C = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.

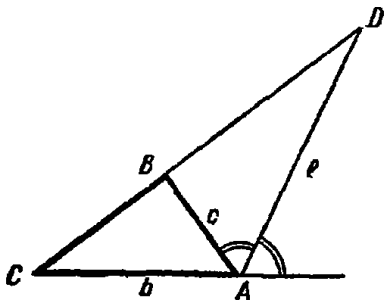


Рис. Р.1.7.

1.7. С одной стороны, площадь треугольника CDA (рис. Р.1.7) можно выразить через стороны b , l и угол между ними, а с другой стороны, — как сумму площадей треугольников

ABC и ABD :

$$S_{CAD} = \frac{1}{2} bl \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} S_{CAD} = S_{ABC} + S_{ABD} &= \frac{1}{2} bc \sin A + \frac{1}{2} cl \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} c \left(b \sin A + l \cos \frac{A}{2} \right). \end{aligned}$$

Приравнявая эти два выражения, найдем

$$l(b - c) \cos \frac{A}{2} = bc \sin A,$$

или

$$l(b - c) \cos \frac{A}{2} = 2bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

Так как $\cos \frac{A}{2}$ в треугольнике не может быть равен нулю, то на него можно сократить. Теперь найдем l .

$$\text{Ответ. } l = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b - c}.$$

1.8. Воспользуемся сравнением площадей. С одной стороны, $S = pr = \frac{a+b+c}{2}r$, где через a обозначена искомая сторона. Находим отсюда, что $2S = ar + (b+c)r$. С другой стороны, если биссектрису угла A обозначить через l_a , то $S = \frac{1}{2} l_a b \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} l_a c \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} l_a (b+c) \sin \frac{\alpha}{2}$ (рисунок сделайте самостоятельно). Из последнего равенства находим, что $b+c = \frac{2S}{l_a \sin \frac{\alpha}{2}}$. Подставляем в выражение для $2S$, по-

лученное раньше:

$$2S = ar + \frac{2Sr}{l_a \sin \frac{\alpha}{2}} = ar + \frac{2S}{q \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

В последнем преобразовании мы учли условие задачи, согласно которому $l_a = rq$. Осталось ввести в рассмотрение радиус R описанной окружности. По условию $R = pqr$. По теореме синусов

$$a = 2R \sin \alpha = 2pqr \sin \alpha,$$

откуда $r = \frac{a}{2pq \sin \alpha}$. Полученное соотношение позволяет определить a из последнего выражения для $2S$. В самом деле, после подстановки получим

$$2S = \frac{a^3}{2pq \sin \alpha} + \frac{2S}{q \sin \frac{\alpha}{2}},$$

откуда после несложных преобразований найдем a .

$$\text{Ответ. } a = \sqrt{8pS \cos \frac{\alpha}{2} \left(q \sin \frac{\alpha}{2} - 1 \right)}.$$

1.9. В треугольнике ABC (рис. Р.1.9) по условию имеем $\frac{AO}{OM} = \sqrt{3}$. Так как BO — биссектриса треугольника ABM , то $AB:BM = AO:OM = \sqrt{3}$. Аналогично $AB:AN = BO:ON =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

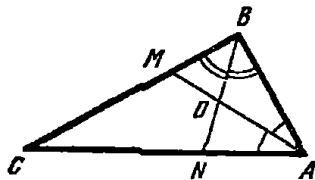


Рис. Р.1.9

Если к треугольникам ABM и ABN применить теорему синусов, то получим

$$\frac{AB}{BM} = \frac{\sin \left(\frac{A}{2} + B \right)}{\sin \frac{A}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{AB}{AN} = \frac{\sin \left(A + \frac{B}{2} \right)}{\sin \frac{B}{2}}.$$

Подставляя вместо $AB:BM$ и $AB:AN$ их отношения, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{A}{2} + B \right) = \sqrt{3} \sin \frac{A}{2}, \\ \sin \left(A + \frac{B}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \sin \frac{B}{2}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sin \frac{A}{2} \cos B + \sin B \cos \frac{A}{2} = \sqrt{3} \sin \frac{A}{2}, \\ \sin A \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos A = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \sin \frac{B}{2}. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на $\sin \frac{A}{2}$, а второе — на $\sin \frac{B}{2}$. После этого найдем из первого уравнения $\operatorname{ctg} \frac{A}{2}$, а из второго $\operatorname{ctg} \frac{B}{2}$:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3} - \cos B}{\sin B}, \quad \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \cos A}{\sin A}.$$

Чтобы упростить эту систему, воспользуемся формулой для котангенса половинного угла:

$$\begin{cases} \frac{1 + \cos A}{\sin A} = \frac{\sqrt{3} - \cos B}{\sin B}, \\ \frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \cos A}{\sin A}. \end{cases}$$

Приравняем отношения $\frac{\sin B}{\sin A}$, найденные из первого и второго уравнений:

$$\frac{\sqrt{3} - \cos B}{1 + \cos A} = \frac{1 + \cos B}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \cos A},$$

т. е. $\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B = \frac{1}{2}.$

Второе уравнение последней системы преобразуется так:

$$\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{\sqrt{3} + 3}{2 \sin A} - \frac{1 + \cos A}{\sin A}.$$

Последнее слагаемое заменяется с помощью первого уравнения этой системы. Получим после преобразований:

$$\frac{1}{\sin B} = \frac{\sqrt{3} + 3}{2 \sin A} - \frac{\sqrt{3}}{\sin B}, \quad \text{т. е.} \quad \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B.$$

Итак, мы пришли к системе

$$\begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B, \\ \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B. \end{cases}$$

Возводя в квадрат и складывая, найдем, что $\cos B = 0$. Следовательно, $B = \frac{\pi}{2}$. Так как $\sin B = 1$, то $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $A = \frac{\pi}{3}$. На долю угла C остается $\frac{\pi}{6}$.

Ответ. Углы A , B и C равны $\pi/3$, $\pi/2$, $\pi/6$ соответственно.

1.10. Из треугольника MPA (рис. Р.1.10) находим $MP = PA \operatorname{ctg} \alpha$. Но $PA = OA - OP = \frac{q}{\cos \alpha} - p$.

Таким образом,

$$MP = \left(\frac{q}{\cos \alpha} - p \right) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{q - p \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Находим MQ :

$$\begin{aligned} MQ &= AQ - AM = AQ - \frac{MP}{\cos \alpha} = q \operatorname{tg} \alpha - \frac{q - p \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{q \sin^2 \alpha - q + p \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{p \cos \alpha - q(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{p - q \cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Полезно заметить, что MQ можно было не вычислять, поскольку выражение для MQ должно получиться из выражения для MP с помощью замены p на q , а q на p .

Ответ. $MP = \frac{q - p \cos \alpha}{\sin \alpha}$, $MQ = \frac{p - q \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

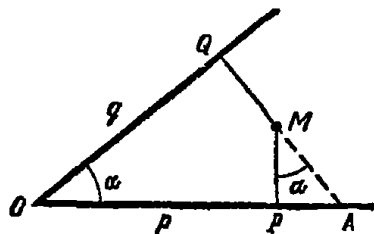


Рис. Р.1.10.

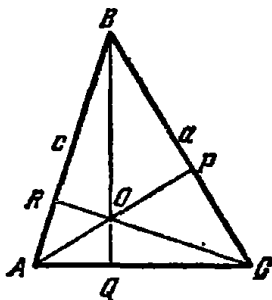


Рис. Р.1.11.

1.11. Пусть $AP = 3$, $CR = 2\sqrt{2}$ (рис. Р.1.11). Из сравнения площадей треугольника ABC получим

$$3a = 2\sqrt{2}c.$$

Так как $a = \frac{BQ}{\sin C}$, $c = \frac{BQ}{\sin A}$, то после сокращения на BQ

получим

$$\frac{3}{\sin C} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin A}. \quad (1)$$

По условию $BQ = 6OQ$. Найдем отрезок AQ из треугольников ABQ и AOQ соответственно:

$$AQ = BQ \operatorname{ctg} A = 6OQ \operatorname{ctg} A, \quad AQ = OQ \operatorname{ctg} \angle OAQ,$$

где $\angle OAQ = \frac{\pi}{2} - C$. Приравнивая эти два выражения, получим второе уравнение, связывающее углы треугольника:

$$6 \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C = 1. \quad (2)$$

Остается решить систему из уравнений (1) и (2). Для этого возведем уравнение (1) в квадрат и воспользуемся формулой $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$. Получим

$$9(1 + \operatorname{ctg}^2 C) = 8(1 + \operatorname{ctg}^2 A). \quad (1')$$

Из уравнения (2) следует, что

$$\operatorname{ctg}^2 C = \frac{1}{36 \operatorname{ctg}^2 A}; \quad (2')$$

подставляя значение $\operatorname{ctg}^2 C$ в уравнение (1'), после несложных преобразований приходим к биквадратному уравнению относительно $\operatorname{ctg} A$:

$$32 \operatorname{ctg}^4 A - 4 \operatorname{ctg}^2 A - 1 = 0. \quad (3)$$

Так как треугольник ABC по условию остроугольный, то нас интересуют лишь положительные корни уравнения (3). Легко убедиться, что оно имеет единственный положительный корень

$$\operatorname{ctg} A = \frac{1}{2}.$$

Подставляя в (2), найдем, что $\operatorname{ctg} C = \frac{1}{3}$.

Теперь можно найти площадь данного треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AP \cdot a,$$

где $AP=3$. Величину a найдем из треугольника BRC :

$$a = \frac{RC}{\sin B} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin B} = 2\sqrt{2} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 B};$$

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} [\pi - (A + C)] = -\operatorname{ctg} (A + C) = \frac{1 - \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C} = 1.$$

Ответ. 6 см².

1.12. Поскольку $B - C = \frac{\pi}{2}$, угол B — тупой (рис. Р.1.12).

Так как

$$b = \frac{h}{\sin C} \quad \text{и} \quad c = \frac{h}{\sin B} = \frac{h}{\sin (\pi/2 + C)},$$

то соотношение $b + c = k$ можно переписать так:

$$\frac{h}{\sin C} + \frac{h}{\cos C} = k,$$

откуда

$$h (\sin C + \cos C) = k \sin C \cos C.$$

Возведем последнее уравнение в квадрат:

$$h^2 (1 + \sin 2C) = \frac{k^2}{4} \sin^2 2C.$$

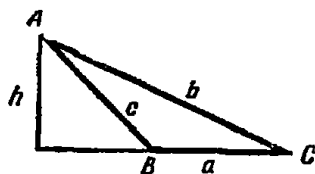


Рис. Р.1.12.

Получим квадратное уравнение относительно $\sin 2C$. Корни этого уравнения

$$\sin 2C = \frac{2(h^2 \pm \sqrt{h^4 + h^2 k^2})}{k^2} = \frac{2h(h \pm \sqrt{h^2 + k^2})}{k^2}.$$

Если мы возьмем перед корнем знак минус, то получим, что $\sin 2C < 0$, чего быть не может, так как угол C острый, а следовательно, $0 < 2C < \pi$.

Остается

$$\sin 2C = \frac{2h(h + \sqrt{h^2 + k^2})}{k^2}.$$

В правой части стоит положительное число. Чтобы можно было найти C , это число не должно превышать единицу, т. е.

$$2h(h + \sqrt{h^2 + k^2}) \leq k^2.$$

Неравенство можно переписать так:

$$2\sqrt{h^4 + k^2 h^2} \leq k^2 - 2h^2.$$

При возведении в квадрат необходимо добавить ограничение $k^2 - 2h^2 \geq 0$. Получим систему

$$\begin{cases} 8h^2 \leq k^2, \\ k^2 \geq 2h^2, \end{cases}$$

решением которой будет $k \geq 2\sqrt{2}h$, так как k и h по условию положительны.

Ответ. $C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2h(h + \sqrt{h^2 + k^2})}{k^2}$ при $k \geq 2\sqrt{2}h$.

1.13. Первый способ. После того как из точки O опущены перпендикуляры длины x , y и z на стороны a , b и c соответственно (рис. Р.1.13а), можно записать

$$2S = ax + by + cz.$$

С одной стороны, $AO = \frac{y}{\sin \alpha}$,
а с другой стороны, $AO = \sqrt{z^2 + AC_1^2} = \sqrt{z^2 + (c - z \operatorname{ctg} \alpha)^2}$.

Таким образом,

$$\frac{y}{\sin \alpha} = \sqrt{z^2 + (c - z \operatorname{ctg} \alpha)^2}.$$

После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} (y^2 - z^2) \operatorname{cosec}^2 \alpha &= c^2 - 2cz \operatorname{ctg} \alpha, \\ (x^2 - y^2) \operatorname{cosec}^2 \alpha &= b^2 - 2by \operatorname{ctg} \alpha, \\ (z^2 - x^2) \operatorname{cosec}^2 \alpha &= a^2 - 2ax \operatorname{ctg} \alpha, \end{aligned}$$

где последние два уравнения выведены аналогично первому из рассмотренных отрезков CO и BO . Сложив все три уравнения, получим в левой части нуль, а в правой — выражение, в которое входит S :

$$0 = (a^2 + b^2 + c^2) - 2(ax + by + cz) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Таким образом,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Второй способ. Так как площадь треугольника ABC равна сумме площадей трех треугольников, на которые

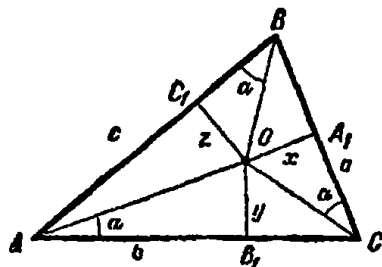


Рис. Р.1.13а.

треугольник ABC разбивается точкой O (рис. Р.1.136), то

$$S = \frac{1}{2} \sin \alpha (an + bl + cm).$$

Записав теорему косинусов для каждого из треугольников AOB , BOC , COA , получим

$$2an \cos \alpha = a^2 + n^2 - m^2,$$

$$2bl \cos \alpha = b^2 + l^2 - n^2,$$

$$2cm \cos \alpha = c^2 + m^2 - l^2.$$

Сложим три последних равенства

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha (an + bl + cm) &= \\ &= a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

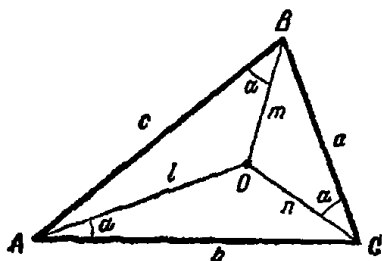


Рис. Р.1.136.

Используя полученное ранее выражение для S , исключим $an + bl + cm$.

$$\text{Ответ. } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

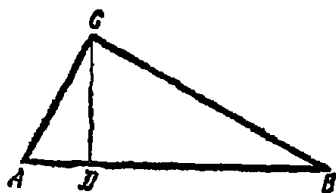


Рис. Р.1.14.

1.14. По условию $CD = BC - AC$ (рис. Р.1.14). Так как $AC = \frac{CD}{\sin A}$,

$BC = \frac{CD}{\sin B}$, то

$$CD \left(\frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin A} \right) = CD$$

или $\sin A - \sin B = \sin A \sin B$.

Последнее уравнение можно переписать так:

$$4 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = \cos(A-B) - \cos(A+B).$$

Так как $A-B = \varphi$, то после замены

$$\cos(A+B) = 2 \cos^2 \frac{A+B}{2} - 1$$

приходим к уравнению относительно $y = \cos \frac{A+B}{2}$:

$$y^2 + 2 \sin \frac{\varphi}{2} y - \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 0.$$

Из его корней

$$y_{1,2} = \pm 1 - \sin \frac{\varphi}{2}$$

годится только первый, т. е.

$$\cos \frac{A+B}{2} = 1 - \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Задача имеет решение при $0 < \varphi < \pi$.

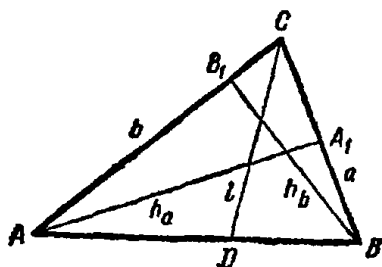


Рис. Р.1.15.

Остается решить систему

$$\begin{cases} A+B=2 \arccos \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \right), \\ A-B=\varphi. \end{cases}$$

Ответ. $A = \arccos \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{\varphi}{2}$, $B = \arccos \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\varphi}{2}$,
 $C = \pi - A - B$.

1.15. Площадь S треугольника ABC (рис. Р.1.15) может быть записана с помощью биссектрисы l следующим образом:

$$S = \frac{1}{2} (a+b) l \sin \frac{C}{2}.$$

Таким образом, имеем три выражения для $2S$:

$$ah_a = bh_b = (a+b) l \sin \frac{C}{2}.$$

Исключая a , получим

$$bh_b = b \frac{h_a + h_b}{h_a} l \sin \frac{C}{2},$$

откуда $C = 2 \arcsin \frac{h_a h_b}{l(h_a + h_b)}.$

Задача имеет решение, если

$$0 < \frac{h_a h_b}{l(h_a + h_b)} < 1, \text{ т. е. } l > \frac{1}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}}.$$

В правой части стоит величина, называемая средним гармоническим длин h_a и h_b .

Ответ. $C = 2 \arcsin \frac{h_a h_b}{l(h_a + h_b)}$, если длина биссектрисы больше среднего гармонического длин h_a и h_b .

1.16. Так как OC и OB (рис. P.1.16) — биссектрисы соответствующих углов треугольника ABC , то

$$\angle COB = \pi - (\angle OCB + \angle OBC) = \pi - \frac{B+C}{2}.$$

Но $B+C = \pi - A = \pi - \alpha$. Следовательно, $\angle COB = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$.

Применяя теорему синусов, получим

$$\begin{aligned} OO_1 &= \frac{a}{2 \sin \angle COB} = \\ &= \frac{a}{2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$

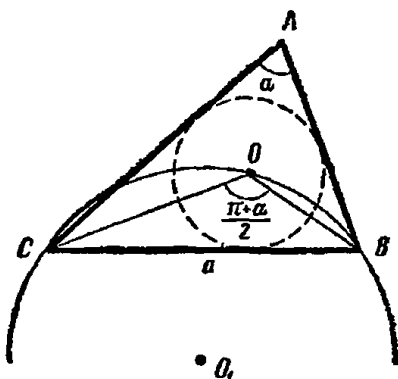


Рис. P.1.16.

1.17. Проведем через центр O_1 (рис. P.1.17) вписанной в треугольник ABC окружности прямую, параллельную AC и пересекающую медиану AE в точке O . Докажем, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC .

С помощью сравнения площадей получим

$$(a+d)BD = rP,$$

где

$$P = a + (a+d) + (a+2d) = 3(a+d),$$

откуда $BD = 3r$.

Так как AE — медиана, то из подобия треугольников BDC и $EF C$

следует, что $EF = \frac{1}{2}BD = \frac{3}{2}r$. Из подобия треугольников AOG и AEF получаем $AO:AE = OG:EF = 2:3$.

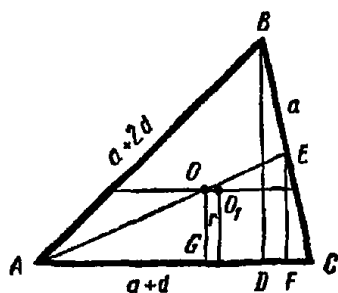


Рис. P.1.17.

Следовательно, $AO:OE=2:1$ и O — точка пересечения медиан.

1.18. Площадь треугольника ABC (рис. Р.1.18), с одной стороны, равна $\frac{1}{2}h_a a = 2kr^2$, а с другой стороны, равна pr . Следовательно, $p = 2kr$.

Так как $AB_1 = AC_1$ (касательные к одной окружности) и аналогично $BC_1 = BA_1$, $CB_1 = CA_1$, то $CB_1 + BC_1 = CA_1 + BA_1 = a$, $AB_1 + CB_1 + BC_1 = p$ и $AB_1 = p - a = 2kr - kr = kr$.

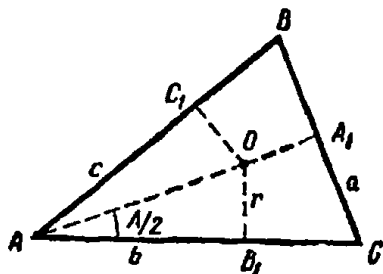


Рис. Р.1.18.

Теперь можно вычислить $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{kr} = \frac{1}{k}$.

Чтобы найти стороны b и c , определим величины $b+c$ и bc . Величина $b+c$ определяется просто:

$$b+c=2p-a=3kr.$$

Чтобы найти bc , вспомним, что площадь треугольника ABC , равная $2kr^2$, может быть записана в виде $\frac{1}{2}bc \sin A$, где $\sin A = \frac{2k}{1+k^2}$ (по формуле универсальной подстановки). Таким образом, $bc = 2r^2(1+k^2)$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} b+c=3kr, \\ bc=2r^2(1+k^2), \end{cases}$$

найдем

$$b = \frac{r}{2}(3k + \sqrt{k^2 - 8}),$$

$$c = \frac{r}{2}(3k - \sqrt{k^2 - 8})$$

или, наоборот,

$$b = \frac{r}{2}(3k - \sqrt{k^2 - 8}),$$

$$c = \frac{r}{2}(3k + \sqrt{k^2 - 8}).$$

Задача имеет решение при $k > 2\sqrt{2}$.

Ответ. $p = 2kr$, $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{k}$, $b = \frac{r}{2} (3k - \sqrt{k^2 - 8})$,
 $c = \frac{r}{2} (3k + \sqrt{k^2 - 8})$, где $k > 2\sqrt{2}$.

1.19. Так как углы C, A, B треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2, то $A = 2C$, $B = 4C$ (рис. Р.1.19). Точка O — центр вписанной окружности, т. е. OK и OL являются отрезками соответствующих биссектрис.

Вычислим углы треугольника OLK . Угол KOL равен углу BOA треугольника BOA , в котором два угла уже известны: угол при вершине A равен C , а угол при вершине B равен $2C$. Следовательно, угол $BOA = \pi - 3C$. Но в силу соотношений, приведенных в условии, $\pi = A + B + C = 7C$, т. е. угол BOA , а следовательно и угол LOK , равен $4C$.

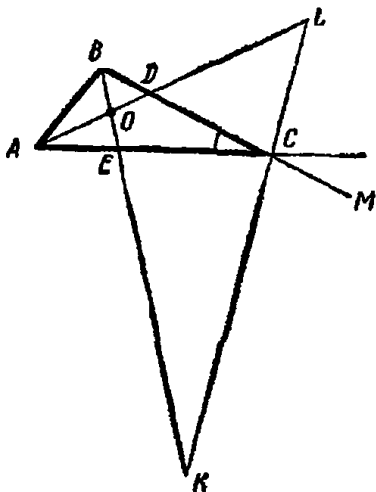


Рис. Р.1.19.

Рассмотрим далее треугольник EKC . Угол при вершине E в этом треугольнике (равный углу AEO из треугольника AEO) вместе с углом OAE , равным C , образует угол LOK , равный $4C$. Таким образом, угол KEC равен $3C$. Угол ECK равен половине угла ECM , который вместе с углом C образует π , т. е. $7C$. Следовательно, угол ECK равен $3C$. Найденные два угла, каждый из которых равен $3C$, позволяют найти третий: угол OKL равен C .

Таким образом, подобие треугольников ABC и OLK доказано.

1.20. Сумма всех углов треугольника равна $7A$. Поэтому

$$A = \frac{\pi}{7}, \quad B = \frac{2\pi}{7}, \quad C = \frac{4\pi}{7}.$$

В силу теоремы синусов

$$a = 2R \sin \frac{\pi}{7}, \quad b = 2R \sin \frac{2\pi}{7}, \quad c = 2R \sin \frac{4\pi}{7}.$$

Соотношение, которое нужно доказать, эквивалентно такому:

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{7}},$$

или

$$\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \\ &= \sin \frac{\pi}{7} \left(\sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{\pi}{7} \left(\sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} \right) = \\ &= \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}, \end{aligned}$$

что и доказывает наше соотношение.

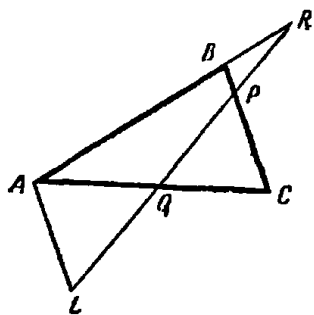


Рис. Р.1.21.

1.21. Проведем AL параллельно BC (рис. Р.1.21). Из подобия треугольников RAL и RBP следует, что

$$\frac{BR}{AR} = \frac{BP}{AL}, \text{ т. е. } \frac{BR \cdot AL}{AR \cdot BP} = 1.$$

Из подобия треугольников AQL и CQP :

$$\frac{AL}{PC} = \frac{AQ}{QC}, \text{ т. е. } AL = \frac{AQ \cdot PC}{QC}.$$

Подставляя значение AL в отношение, полученное раньше, приходим к равенству

$$\frac{BR \cdot AL}{AR \cdot BP} = \frac{BR \cdot AQ \cdot PC}{AR \cdot BP \cdot QC} = 1,$$

что и требовалось доказать.

1.22. Пусть AE — высота, опущенная на BC (рис. Р.1.22). Тогда все участвующие в левой части равенства величины

можно выразить через AE и длины отрезков, лежащих на BC . При этом следует стремиться связать каждый отрезок с точкой D . Получим

$$\begin{aligned} AB^2 &= BE^2 + AE^2 = \\ &= (BD + DE)^2 + AE^2, \\ AC^2 &= CE^2 + AE^2 = \\ &= (CD - DE)^2 + AE^2, \\ AD^2 &= DE^2 + AE^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись полученными соотношениями, составим сумму

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$(DE^2 + AE^2)(DC + BD - BC) + DC \cdot BD^2 + BD \cdot DC^2.$$

Так как $DC + BD = BC$, то остается

$$DC \cdot BD^2 + BD \cdot DC^2 = (BD + DC) DC \cdot BD = BC \cdot DC \cdot BD,$$

что и требовалось доказать.

1.23. Проведем CE и AD параллельно BQ , а отрезки AP и CR продолжим до пересечения с ними (рис. Р.1.23).

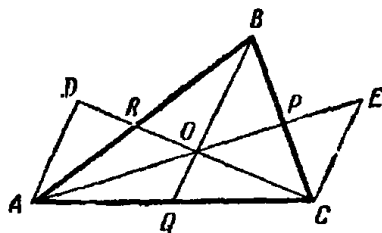


Рис. Р.1.23.

Рассмотрим образовавшиеся в результате подобные треугольники. Так как отрезки AD и OQ параллельны, то $\frac{CQ}{QA} = \frac{CO}{OD}$. Из подобия треугольников ADO и OEC следует, что $\frac{CO}{OD} = \frac{CE}{AD}$. Итак, $\frac{CQ}{QA} = \frac{CE}{AD}$.

Воспользовавшись двумя парами подобных треугольников: EPC и OBP , ADR и RBO , мы можем записать

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BO}{CE}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{AD}{BO}.$$

Следовательно,

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{AD}{BO} \cdot \frac{BO}{CE} \cdot \frac{CE}{AD} = 1.$$

1.24. Треугольник ABC и три треугольника, образовавшихся внутри него (рис. Р.1.24), подобны. Поэтому

$$\frac{AF}{AB} = \frac{OD}{AB} = \frac{ON}{BC} = \frac{KC}{BC},$$

$$\frac{CN}{CA} = \frac{OK}{CA} = \frac{EK}{BC}.$$

Следовательно,

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = \frac{KC}{BC} + \frac{BE}{BC} + \frac{EK}{EC} = 1.$$

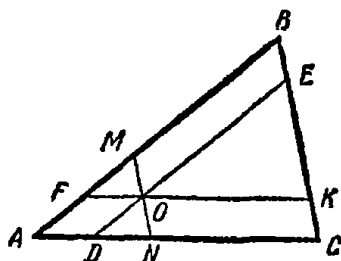


Рис. Р.1.24.

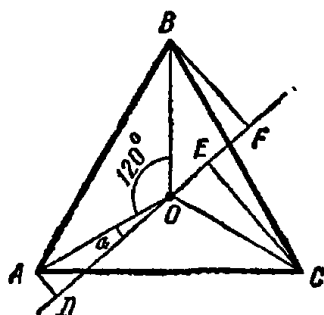


Рис. Р.1.25.

1.25. Обозначим угол AOD (рис. Р.1.25) через α . Так как углы AOB и BOC равны 120° , то углы BOF и COE равны соответственно $60^\circ - \alpha$ и $60^\circ + \alpha$. Составим сумму

$$\begin{aligned} AD^2 + CE^2 + BF^2 &= \\ &= R^2 \sin^2 \alpha + R^2 \sin^2 (60^\circ + \alpha) + R^2 \sin^2 (60^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

После понижения степени получим

$$\begin{aligned} AD^2 + CE^2 + BF^2 &= \\ &= \frac{R^2}{2} [1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos (120^\circ + 2\alpha) + 1 - \cos (120^\circ - 2\alpha)] = \\ &= \frac{R^2}{2} \left(3 - \cos 2\alpha + 2 \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} R^2. \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что эта величина не зависит от положения прямой на плоскости.

1.26. По теореме косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 7,$$

откуда $c = \sqrt{7}$.

По теореме синусов

$$R = \frac{c}{2 \sin C} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Угол AOB (рис. Р.1.26) центральный, а угол ACB вписанный. У них общая дуга, т. е. угол AOB равен 120° .

Применим теперь теорему синусов к треугольнику AOB :

$$R_{AOB} = \frac{c}{2 \sin 120^\circ} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Оставшиеся величины R_{AOC} и R_{BOC} можно найти по формуле

$$R = \frac{abr}{4S}.$$

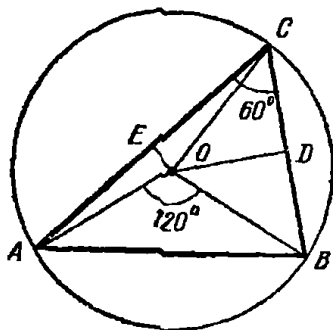


Рис. Р.1.26.

Площади каждого из этих треугольников проще вычислить, если найти их высоты, опущенные из точки O :

$$OE^2 = R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{1}{12}, \quad OE = \frac{1}{\sqrt{12}};$$

$$OD^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}, \quad OD = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, площади треугольников AOC и BOC равны $\frac{3}{2\sqrt{12}}$ и $\frac{2}{\sqrt{3}}$ соответственно, а радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны $\frac{7}{\sqrt{3}}$ и $\frac{7}{4\sqrt{3}}$ соответственно.

Ответ. $\sqrt{\frac{7}{3}}, \frac{7}{\sqrt{3}}, \frac{7}{4\sqrt{3}}.$

1.27. По теореме косинусов и в силу равенства $a^2 = c(b+c)$ получим

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos A = c(b+c),$$

откуда

$$\cos A = \frac{b-c}{2c}.$$

Данное в условии равенство можно записать так: $c^2 = a^2 - bc$, и сравнить его с теоремой косинусов для угла C . Получим

$$\cos C = \frac{b+c}{2a}.$$

Нам нужно доказать, что угол A вдвое больше угла C . Вычислим для этого $\cos 2C$ и сравним с $\cos A$:

$$\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = 2 \frac{c^2 + b^2 + 2bc}{4a^2} - 1 = \frac{c^2 + b^2 + 2bc - 2a^2}{2a^2}.$$

В выражение для $\cos A$, которое мы получили раньше, сторона a не входит. Поэтому заменим в правой части полученной формулы a^2 на $bc + c^2$. Получим

$$\cos 2C = \frac{b^2 - c^2}{2c(b+c)} = \frac{b-c}{2c},$$

т. е. $\cos A = \cos 2C$. Так как $\cos C = \frac{b+c}{2a} > 0$, то угол C острый. Углы A и $2C$ лежат между 0 и π , т. е. в интервале монотонности косинуса. Таким образом, из равенства косинусов следует равенство углов

$$A = 2C.$$

1.28. Центр O вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис (рисунок сделайте самостоятельно). Поэтому

$$AO = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}, \quad BO = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}}, \quad CO = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}.$$

Подставляя в данное соотношение $OA^2 = OB \cdot OC$, получим

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Применив к правой части формулу преобразования произведения синусов в сумму, приведем равенство к виду

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2}.$$

Заметив, что $B + C = \pi - A$, получим

$$\cos \frac{B-C}{2} = 2 \sin^2 \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2},$$

что и требовалось доказать.

1.29. По условию $S = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$. С другой стороны, $S = \frac{1}{2} bc \sin A$. Сравнивая эти выражения, получим $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = \frac{1}{2} bc \sin A$.

Воспользуемся теоремой косинусов и заменим a^2 на $b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. После приведения подобных и сокращения на bc останется тригонометрическое уравнение

$$\frac{1}{2} \sin A = -2 \cos A + 2,$$

которое можно переписать так:

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 4 \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Так как A — угол треугольника, то $\frac{A}{2}$ лежит в первой четверти и $\sin \frac{A}{2} \neq 0$. Наше уравнение принимает вид $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{4}$.

Ответ. $A = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$.

1.30. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры квадратов, построенных на сторонах треугольника ABC (рис. Р.1.30). Опустим из них перпендикуляры на стороны. Проведем средние линии DE и KE . На отрезках O_2K и KE построим параллелограмм $KELO_2$.

Рассмотрим четырехугольники O_1EDO_3 и $BELO_2$. При повороте около точки E одного из них на 90° он совпадает с другим (убедитесь в равенстве сторон и углов самостоятельно). Следовательно, отрезки O_1O_3 и BO_2 равны, что и требовалось доказать.

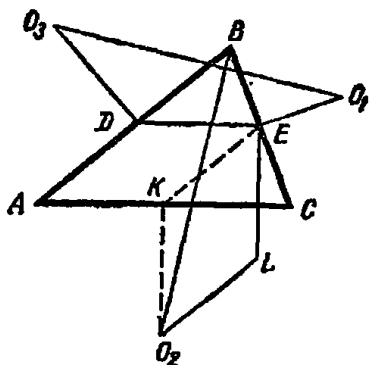


Рис. Р.1.30.

1.31. Построим треугольник ABC до параллелограмма так, чтобы сторона AB была диагональю параллелограмма

(рис. Р.1.31). Проведем $BD_1 \parallel AD$ и обозначим на чертеже точку M_1 .

Треугольники MDC и M_1BC подобны. Так как $MF = \frac{1}{4}CF$, то $MC:MM_1 = 3:2$. Следовательно, $MD:M_1B = 3:5$. Так как $M_1B = AM$, то $AM:MD = 5:3$.

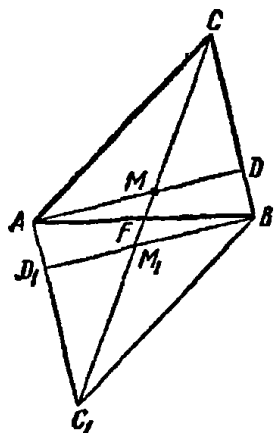


Рис. Р.1.31.

Площадь треугольника AFM в восемь раз меньше площади треугольника ABC , т. е. равна $1/8$. Высота треугольника AFM (F — середина AB), опущенная из вершины F , в два раза меньше высоты треугольника ABD , опущенной из вершины B . Так как $AM:AD = 5:8$, то площадь треугольника AFM относится к площади треугольника ABD , как 5 относится к $2 \cdot 8$, т. е. как 5:16.

Зная, что площадь треугольника AFM равна $1/8$, можно теперь найти и площадь треугольника ABD .

Ответ. $2/5$.

1.32. Пусть R — радиус окружности, а α , β и γ — вписанные углы, опирающиеся соответственно на стороны AB , BC и AD (рис. Р.1.32). Углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны, что отмечено на рисунке. Углы DBC и DAC тоже равны, и их нетрудно вычислить: $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. По теореме синусов

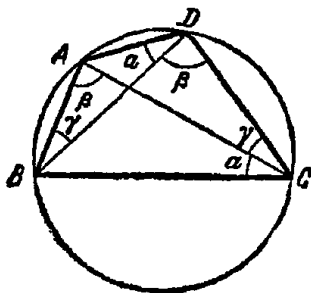


Рис. Р.1.32.

$$\begin{aligned} AB &= 2R \sin \alpha, \\ BC &= 2R \sin \beta, \\ DC &= 2R \sin (\alpha + \beta + \gamma), \\ AD &= 2R \sin \gamma. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} AB \cdot DC + AD \cdot BC &= 4R^2 [\sin \alpha \sin (\alpha + \beta + \gamma) + \sin \beta \sin \gamma] = \\ &= 2R^2 [\cos (\beta + \gamma) - \cos (2\alpha + \beta + \gamma) + \cos (\beta - \gamma) - \cos (\gamma + \beta)] = \\ &= 2R^2 [\cos (\beta - \gamma) - \cos (2\alpha + \beta + \gamma)]. \end{aligned}$$

Так как

$$AC = 2R \sin (\alpha + \beta), \quad BD = 2R \sin (\alpha + \gamma),$$

то

$$AC \cdot BD = 4R^2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) = \\ = 2R^2 [\cos(\beta - \gamma) - \cos(2\alpha + \beta + \gamma)].$$

Итак,

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

1.33. Продолжим боковые стороны трапеции AB и CD (рис. Р.1.33) до пересечения в точке S . Если через S и M (где M — середина BC) провести прямую, то она пересечет AD в точке N , которая является серединой AD .

Из подобия треугольников BSM и ASN имеем

$$\frac{AN}{BM} = \frac{SN}{SM},$$

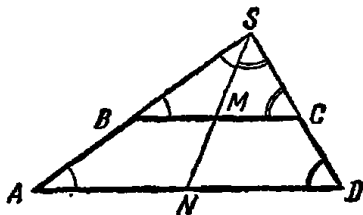


Рис. Р.1.33.

откуда

$$\frac{AN - BM}{BM} = \frac{SN - SM}{SM}, \text{ т. е. } \frac{AN - BM}{BM} = \frac{MN}{SM}.$$

Так как по условию $MN = AN - BM$, то $BM = SM$ и треугольник SMB равнобедренный. То же самое можно сказать и о треугольнике SMC . Следовательно, угол SMC равен удвоенному углу A , а угол SMB — удвоенному углу D (по свойству внешнего угла треугольника). Но оба эти угла SMB и SMC образуют развернутый угол. Следовательно, сумма углов A и D равна 90° .

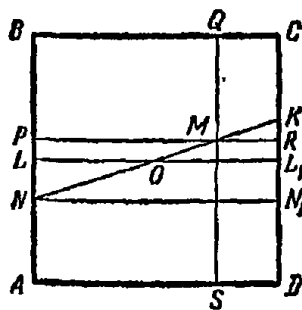


Рис. Р.1.34.

1.34. Пусть $AB = a$, $MR = x$ (рис.Р.1.34). Выразим через a и x длины отрезков MQ , MS и MP . Ясно, что для этого достаточно найти длину отрезка QM , поскольку $MS = a - QM$, а $MP = a - x$. Так как

$QM = CR = CK + KR$, то вычислим CK и KR . По условию $AN = \frac{a}{3}$, а потому (треугольники OLN и OL_1K равны) $CK = \frac{a}{3}$. Чтобы найти KR , рассмотрим подобные треугольники

MKR и NKN_1 :

$$\frac{MR}{NN_1} = \frac{KR}{KN_1}, \quad \text{т. е. } \frac{x}{a} = \frac{KR}{\frac{a}{3}},$$

откуда $KR = \frac{x}{3}$, а $QM = \frac{a}{3} + \frac{x}{3}$. Остается убедиться в том, что числа $a - x$, $\frac{2a-x}{3}$, $\frac{a+x}{3}$, x образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{2x-a}{3}$.

1.35. Пусть $CE = x$ (рис. Р.1.35). Выразим через x отрезок AE из треугольника ACE , в котором угол CAE равен 30° : $AE = x\sqrt{3}$. С другой стороны, $AE = AB - BE$, а так как $BE = CE = x$, то $AE = 2 - x$. Итак, $2 - x = x\sqrt{3}$, откуда $x = \sqrt{3} - 1$.

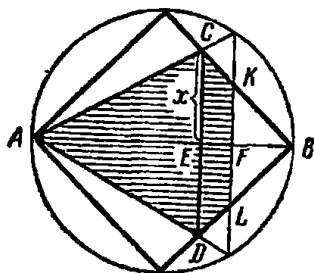


Рис. Р.1.35.

Заметим, что $KF = FB = \frac{1}{2}$; площадь искомой фигуры равна

$$S_{ACD} + S_{BCD} - S_{BKL} = 2S_{ACB} - S_{BKL}.$$

$$\text{Ответ. } 2\sqrt{3} - \frac{9}{4}.$$

1.36. Углы при нижних основаниях трапеции и треугольника равны. Обозначим их через α . Тогда угол BAO равен углу ABO , т. е. равен $90^\circ - \alpha$. Поэтому угол OAD равен $2\alpha - 90^\circ$. Так как треугольник MNO равнобедренный ($MO = NO$), то угол MNO равен α , а угол NOE равен $90^\circ - (180^\circ - 2\alpha)$, т. е. $2\alpha - 90^\circ$.

Треугольники ONE и AOD равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $OE = AD$. Кроме того, $MO = OB$, как два радиуса, и $NE = OD$, как стороны равных треугольников. Это означает, что $BD = l$.

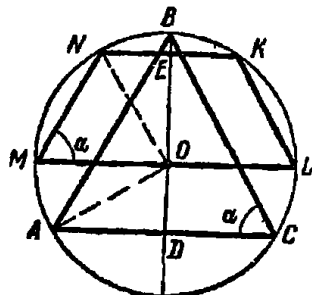


Рис. Р.1.36.

Следовательно, так как $AD \cdot BD = S$, то $OE = AD = \frac{S}{l}$.

$$\text{Ответ. } \frac{S}{l}.$$

1.37. Из подобия треугольников AOD и BOC (рис. Р.1.37) находим, что $\frac{MO}{NO} = p$, т. е. $\frac{MN}{NO} = p + 1$. Отношение площадей трапеции и треугольника AOD можно записать в виде

$$\frac{(BC + AD) MN}{AD \cdot NO} = \left(\frac{BC}{AD} + 1 \right) \frac{MN}{NO} = (p + 1)^2.$$

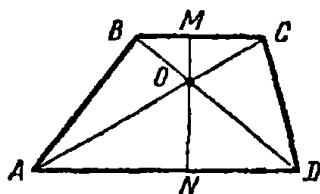


Рис. Р.1.37.

Ответ. $(p + 1)^2$.

1.38. Пусть R — радиус окружности, n — число сторон первого многоугольника, x — периметр третьего.

Периметры первого и второго многоугольников равны соответственно

$$a = 2nR \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 4nR \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}, \quad b = 4nR \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}.$$

Периметр третьего равен

$$x = 4nR \sin \frac{\pi}{2n} = 4nR \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}}.$$

Сравнивая первые два выражения, найдем, что $1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n} = \frac{b}{a}$.

Следовательно, $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n} = \frac{2a - b}{a}$ и $x = b \sqrt{\frac{a}{2a - b}}$.

Ответ. $b \sqrt{\frac{a}{2a - b}}$.

1.39. Точки O и M обязательно должны лежать по одну сторону от окружности. Если они расположены так, как показано на рис. Р.1.39а, то $NM > KL$, так как хорда NM ближе к центру окружности. Но $NM < a$, а $KL = 2a$. Получаем $a < 2a$, что невозможно. Следовательно, фигуры расположены так, как показано на рис. Р.1.39б.

Центр рассматриваемой окружности лежит на биссектрисе угла AOB , так как точка O_1 равноудалена от лучей AO и OB .

Предположим для определенности, что угол α больше угла β . Треугольник OMO_1 , в котором сторона OM равна a , сторона MO_1 равна R , а OO_1 легко выражается через R ,

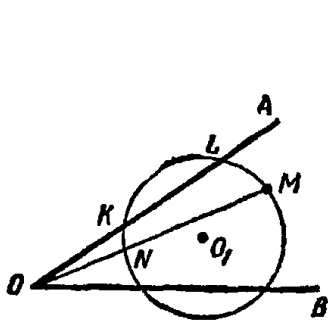


Рис. P.1.39a.

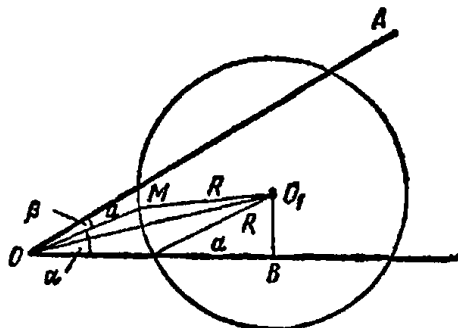


Рис. P.1.39b.

позволяет составить уравнение для определения R . В самом деле, угол MOO_1 равен $\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Следовательно, по теореме косинусов

$$R^2 = a^2 + OO_1^2 - 2a \cdot OO_1 \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Из треугольника O_1OB находим

$$OO_1 = \frac{O_1B}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}},$$

а так как $O_1B = \sqrt{R^2 - a^2}$, то

$$OO_1 = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

После подстановки уравнение относительно R выглядит следующим образом:

$$R^2 = a^2 + \frac{R^2 - a^2}{\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} - 2a \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Заменим $\frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}$ на $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + 1$ и после несложных упрощений получим

$$(R^2 - a^2) \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha+\beta}{2} = 2a \sqrt{R^2 - a^2} \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}},$$

откуда

$$\sqrt{R^2 - a^2} = 2a \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a (\sin \alpha + \sin \beta)}{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

$$\text{Ответ. } R = a \sqrt{1 + \frac{(\sin \alpha + \sin \beta)^2}{\cos^4 \frac{\alpha+\beta}{2}}}.$$

1.40. Запишем отношение площадей данных прямоугольных треугольников (рис. Р.1.40):

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC} = \frac{n}{m}.$$

Кроме того, $AD \cdot AB = AE \cdot AC$. Найдем отсюда AD и подставим в предыдущее равенство; получим

$$\frac{AE^2}{AB^2} = \frac{n}{m}.$$

Обозначим углы ADC и AEB , опирающиеся на дугу BC , через φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{AE} = \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Следовательно, дуга BC равна $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m}{n}}$.

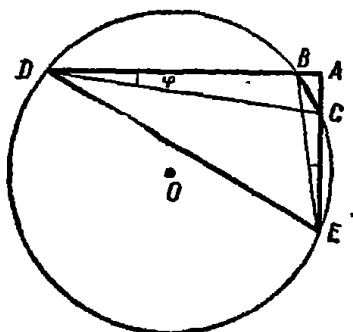


Рис. Р.1.40.

Угол A прямой и измеряется полуразностью высекаемых им на окружности дуг $(2\pi - \sphericalangle DE)$ и BC :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(2\pi - \sphericalangle DE) - \sphericalangle BC}{2}, \text{ т. е. } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} (\sphericalangle DE + \sphericalangle BC).$$

Отсюда найдем величину дуги DE , которая равна

$$\pi - 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m}{n}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m}{n}} \right) = 2\operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Ответ. $2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m}{n}}, 2\operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{m}{n}}.$

1.41. Введем обозначения, указанные на рис.Р.1.41. В треугольнике AOO_1 :

$$AO_1 = \frac{x}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad OO_1 = r - x.$$

Чтобы применить к этому треугольнику теорему косинусов, обозначим угол BAD через β . Из треугольника ABD

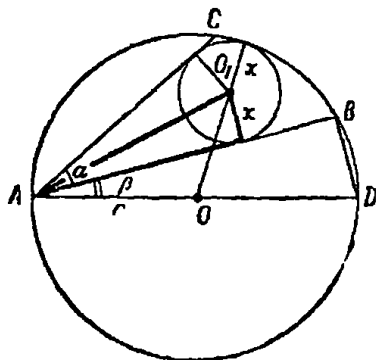


Рис. Р.1.41.

$$\cos \beta = \frac{b}{2r}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2r}.$$

Следовательно, по теореме косинусов для треугольника AOO_1 :

$$(r-x)^2 = \frac{x^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + r^2 - 2 \frac{rx}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right).$$

Раскроем скобки и воспользуемся формулой косинуса суммы. После упрощений получим искомый радиус.

Ответ. $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(b - 2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{4r^2 - b^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$

1.42. Обозначим сторону квадрата через a . Тогда (рис.Р.1.42)

$$CO = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad DO = a \pm \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Перед корнем выбраны два знака, так как искомый квадрат может быть расположен либо так, как показано на рис.Р.1.42а, либо так, как показано на рис.Р.1.42б. В первом случае нужно взять знак плюс, а во втором — минус.

С другой стороны, из треугольника OBD находим $DO = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. Получаем уравнение

$$R^2 - \frac{a^2}{4} = \left(a \pm \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2.$$

После простых преобразований и повторного возведения в квадрат получаем уравнение

$$2a^4 - 2a^2(R^2 + r^2) + (R^2 - r^2)^2 = 0,$$

в котором исчезло различие между случаями, изображенными

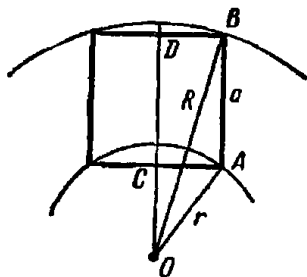


Рис. P.1.42a.

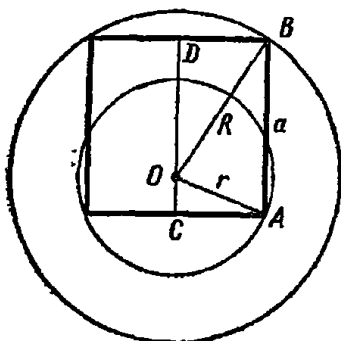


Рис. P.1.42b.

на рисунках а и б (см. рисунок). Из последнего уравнения имеем

$$a^2 = \frac{1}{2}(r^2 + R^2 \pm \sqrt{(R^2 + r^2)^2 - 2(R^2 - r^2)^2}),$$

или

$$a^2 = \frac{1}{2}(r^2 + R^2 \pm \sqrt{-R^4 - r^4 + 6R^2r^2}).$$

Из первого выражения для a^2 видно, что оба значения положительны, если неотрицательно подкоренное выражение. Так как по условию $R > r$, то получаем

$$R^2 + r^2 \geq \sqrt{2}(R^2 - r^2),$$

или

$$1 < \frac{R^2}{r^2} \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 3 + \sqrt{8},$$

и окончательно

$$1 < \frac{R}{r} \leq \sqrt{3 + \sqrt{8}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Ответ. $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{R^2 + r^2 \pm \sqrt{6R^2r^2 - R^4 - r^4}}.$

Задача имеет решение при $1 < \frac{R}{r} \leq 1 + \sqrt{2}$. Если же $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$, то задача имеет единственное решение $a = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}.$

1.43. Так как $OE^2 = R^2 - x^2$ и $OF = \frac{R}{2}$ (рис.Р.1.43), то $EF = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{R}{2}$. С другой стороны, $EF = 2x$. Получаем уравнение

$$R^2 - x^2 = \left(\frac{R}{2} + 2x\right)^2,$$

решая которое найдем половину стороны квадрата $x = \frac{3}{2}$.

Ответ. 3.

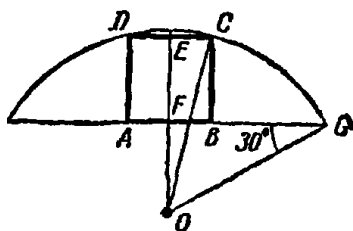


Рис. Р.1.43.

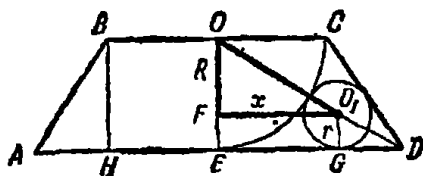


Рис. Р.1.44.

1.44. Введем обозначения, указанные на рис.Р.1.44. Так как меньшая окружность вписана в угол ADC , то ее центр O_1 лежит на биссектрисе этого угла.

Из треугольника OO_1F имеем: $OO_1^2 = OF^2 + FO_1^2$, т. е.

$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + x^2. \quad (1)$$

Из треугольника ABH : $AH = BH \operatorname{ctg} \alpha = R \operatorname{ctg} \alpha$, т. е.

$$a = 2R + 2R \operatorname{ctg} \alpha. \quad (2)$$

Из треугольника O_1GD :

$$r = \left(\frac{a}{2} - x\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Из уравнения (1) находим

$$4Rr = x^2, \text{ или } 2\sqrt{R}\sqrt{r} = x,$$

и подставляем в уравнение (3). Получим

$$2r + 4\sqrt{R}\sqrt{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,$$

или, проще,

$$2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} r + 4\sqrt{R}\sqrt{r} - a = 0.$$

Мы пока не будем выражать R через a и α , а, наоборот, заменим a его выражением через R и α . Это разумно, так как квадратное уравнение таково, что впоследствии $\sqrt{R}$ вынесется за скобки:

$$\begin{aligned} \sqrt{r} &= \frac{-2\sqrt{R} \pm \sqrt{4R + 2a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \sqrt{R} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha} \right). \end{aligned}$$

Знак минус перед корнем не имеет геометрического смысла. Если в подкоренном выражении воспользоваться формулой котангенса двойного угла, то

$$1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{r} &= \sqrt{R} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left[-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] = \\ &= \sqrt{R} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \sqrt{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sqrt{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \\ &= a \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\left(1 - \sqrt{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2}{4(1 + \operatorname{ctg} \alpha)} = \frac{a \left[(1 - \sqrt{2}) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 \right]^2}{4(1 + \operatorname{ctg} \alpha)}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{a \left[(1 - \sqrt{2}) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 \right]^2}{4(1 + \operatorname{ctg} \alpha)}.$

1.45. Рассмотрим вначале случай, когда диаметр CD разбивает фигуру $PQNM$ на две части. Докажем, что фигуры $CQNK$ и OQ_1D равновелики (рис. Р.1.45а). Площадь первой фигуры представим как разность

$$S_{CQNK} = S_{CDQ} - S_{KDN},$$

где

$$S_{CDQ} = S_{COQ} + S_{QOD}.$$

Итак,

$$S_{CQNK} = S_{COQ} + S_{QOD} - S_{KDN}.$$

Если радиус меньшей окружности равен r , то радиус большей равен $r\sqrt{2}$. Углы CDQ и COQ опираются на общую дугу CQ , причем один из них вписан в окружность, а другой является центральным.

Следовательно, если угол CDQ равен β , то угол COQ равен 2β . Теперь мы можем вычислить площади секторов COQ и KDN :

$$S_{COQ} = \frac{r^2 \cdot 2\beta}{2} = r^2\beta,$$

$$S_{KDN} = \frac{R^2\beta}{2} = \frac{(\sqrt{2}r)^2\beta}{2} = r^2\beta.$$

Таким образом, $S_{COQ} = S_{KDN}$. Тем самым доказано, что $S_{CQNK} = S_{QOD}$. Поскольку треугольники QOD и Q_1OD равновелики (у них общее основание и общая высота), то

$$S_{CQNK} = S_{Q_1OD}.$$

Совершенно аналогично доказывается следующее равенство

$$S_{CKMP} = S_{P_1OD},$$

что и завершает доказательство для случая, когда точки P и Q лежат по разные стороны от диаметра.

Если точки P и Q лежат по одну сторону от диаметра (рис. Р.1.45б), то решение не меняется. Только

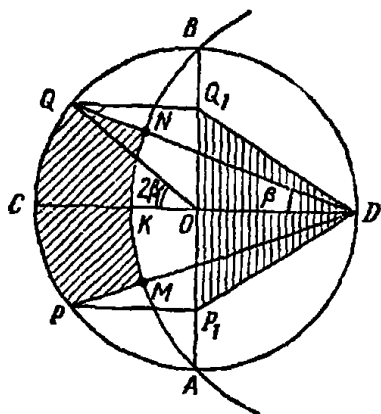


Рис. Р.1.45а.

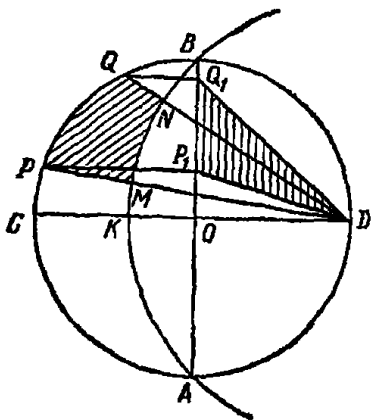


Рис. Р.1.45б.

в конце найденные площади придется не складывать, а вычитать.

1.46. Из треугольника OAK (рис. Р.1.46)

$$OK^2 = R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

Так как $KP_1 = AP_1 - \frac{AB}{2}$, то из треугольника OKP_1

$$OK^2 = OP_1^2 - \left(AP_1 - \frac{AB}{2}\right)^2.$$

По условию $OP_1 = MP_1$. Приравнявая два полученных выражения для OK^2 и заменяя OP_1 на MP_1 , найдем, что

$$MP_1^2 = R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(AP_1 - \frac{AB}{2}\right)^2.$$

Нам нужно вычислить длину отрезка MP . Чтобы воспользоваться прямоугольным треугольником MPP_1 , в котором мы знаем длину MP_1 , нужно вычислить PP_1 . Так как треугольник APB прямоугольный,

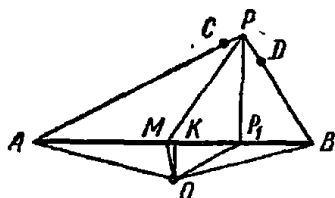


Рис. Р.1.46.

то $PP_1^2 = AP_1 \cdot P_1B = AP_1(AB - AP_1)$. Теперь можно вычислить и MP :

$$\begin{aligned} MP^2 &= MP_1^2 + PP_1^2 = \\ &= R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(AP_1 - \frac{AB}{2}\right)^2 + \\ &\quad + AP_1(AB - AP_1). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим, что

$$MP^2 = R^2.$$

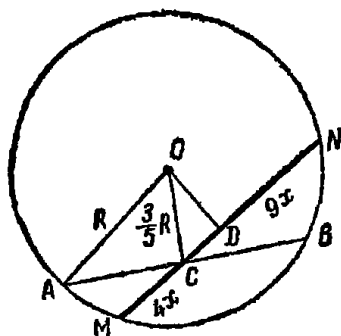


Рис. Р.1.47.

Ответ. R .

1.47. Из треугольника AOC (рис. Р.1.47) легко найти $AC = \frac{4}{5}R$. Так как

$$AC \cdot CB = MC \cdot CN,$$

то

$$\frac{16}{25}R^2 = 36x^2,$$

откуда $x = \frac{2}{15}R$.

Проведем перпендикуляр OD к хорде MN . Так как $MD = \frac{13}{2}x$, то $CD = MD - MC = \frac{5}{2}x = \frac{R}{3}$.

Косинус угла OCD равен синусу искомого угла NCB :

$$\frac{CD}{OC} = \frac{R}{3}; \frac{3R}{5} = \frac{5}{9}.$$

Ответ. $\arcsin \frac{5}{9}$.

1.48. Соединим центры O_2 и O_1 рассматриваемых окружностей. Отрезок O_1O_2 равен $x + \frac{R}{2}$ (рис. Р.1.48). Центр O_2

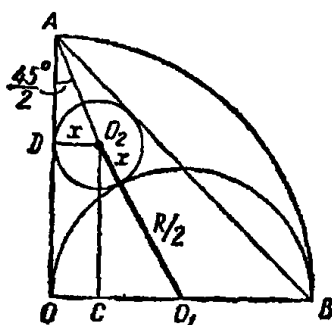


Рис. Р.1.48.

лежит на биссектрисе угла OAB , равного 45° . Поэтому угол DAO_2 равен $\frac{45^\circ}{2}$. Это позволяет выразить через R и x отрезок DO :

$$\begin{aligned} DO &= R - AD = R - x \operatorname{ctg} \frac{45^\circ}{2} = \\ &= R - x \frac{1 + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = R - x(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Так как $CO_1 = \frac{R}{2} - x$, $O_2C = DO = R - x(\sqrt{2} + 1)$, а $O_1O_2 = x + \frac{R}{2}$, то по теореме Пифагора для треугольника O_2CO_1 получим

$$\left(\frac{R}{2} - x\right)^2 + [R - x(\sqrt{2} + 1)]^2 = \left(\frac{R}{2} + x\right)^2,$$

или после преобразований

$$[R - x(\sqrt{2} + 1)]^2 = 2Rx,$$

т. е.

$$R - x(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2R} \sqrt{x}.$$

Получили квадратное уравнение относительно $\sqrt{x}$. Решая его, найдем

$$\sqrt{x_{1,2}} = \sqrt{R} \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} + 6}}{2(\sqrt{2} + 1)}.$$

Так как $\sqrt{4\sqrt{2}+6} = \sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{2}+3} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$, то $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}\sqrt{R} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{R}$. (Второе значение $\sqrt{x}$ не имеет смысла.)

Ответ. $x = (3 - 2\sqrt{2})R$.

1.49. Соединим точки M и C (рис. Р.1.49). Так как диаметр ED перпендикулярен к BC , то точка F делит хорду BC пополам. Это означает, что треугольник MCB равнобедренный. Обозначим $MB = MC = px$. Угол AMC равен удвоенному углу MBC , т. е. $\pi - 2\varphi$. Из треугольника AMC по теореме косинусов имеем

$$\begin{aligned} AC^2 &= AM^2 + MC^2 - \\ &- 2AM \cdot MC \cos(\pi - 2\varphi) = \\ &= x^2(q^2 + p^2 + 2pq \cos 2\varphi), \end{aligned}$$

а из треугольника ABC по теореме синусов

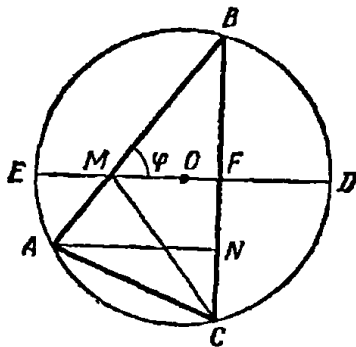


Рис. Р.1.49.

$$AC = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2R \cos \varphi, \text{ т. е. } AC^2 = 4R^2 \cos^2 \varphi.$$

Приравнявая найденные выражения для AC^2 , получим, что

$$x^2 = \frac{4R^2 \cos^2 \varphi}{q^2 + p^2 + 2pq \cos 2\varphi}.$$

Площадь треугольника ABC будем искать в виде $S = \frac{1}{2} AN \cdot BC$. Так как $MB = px$, а $MA = qx$, то $AB = (p + q)x$. Из треугольника ABN находим $AN = AB \cos \varphi = (p + q)x \cos \varphi$. Сторону BC можно определить из треугольника MBF , в котором сторона $BF = \frac{1}{2} BC$:

$$BC = 2BF = 2MB \sin \varphi = 2px \sin \varphi.$$

Таким образом,

$$S = p(p + q)x^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} p(p + q)x^2 \sin 2\varphi,$$

откуда

$$x = \frac{4R^2 \cos^2 \varphi}{q^2 + p^2 + 2pq \cos 2\varphi}.$$

Ответ.

$$S = \frac{2p(p+q)R^2 \cos^2 \varphi \sin 2\varphi}{q^2 + p^2 + 2pq \cos 2\varphi}.$$

Глава 2

ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.1. Отрезок KL (рис. Р.2.1), равный ширине реки, параллельно перенесем в точку B , чтобы точка L совпала с точкой B . Получим отрезок EB . Точку E соединим с точкой A , получим точку D , которую выберем за начало моста. Путь $ADCB$ из A в B кратчайший, так как величина отрезка CD постоянна, а отрезки AD и CB спрямлены в AE .

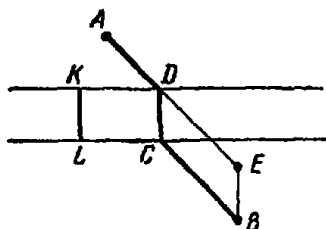


Рис. Р.2.1.

2.2. На отрезках MP и PN (рис. Р.2.2) построим сегменты, вмещающие угол 30° . В пересечении получим точку A . Соединим точку A с M и N , на AM и AN отложим отрезки длины a . Треугольник ABC искомый.

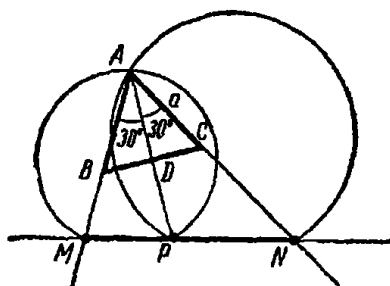


Рис. Р.2.2.

Задача имеет два решения. Одно изображено на рисунке; второе получится симметричным отражением первого от оси MN .

2.3. Отразим треугольник ABC (рис. Р.2.3) от вертикальной оси, проходящей через середину BC . После этого треугольник CA_1A отразим от оси A_1A . В четырехугольнике C_1ABA_1 противоположные стороны AB и C_1A_1 , а также A_1B и C_1A равны, т. е. он — параллелограмм с углом φ при вершине C_1 и углом $\pi - \varphi$ при вершине A_1 .

Так как точка C_1 отстоит от C на расстоянии $2h_a$, то треугольник CC_1B легко построить. Остается найти точку A_1 как пересечение дуги сегмента, вмещающего угол $\pi - \varphi$ и построенного на отрезке C_1B , с прямой, параллельной CB и отстоящей от CB на расстоянии h_a .

Задача имеет два симметричных решения, так как дуга сегмента может быть построена в любую сторону от C_1B . Построение возможно при любом соотношении между a , h_a и $0 < \varphi < \pi$.

2.4. Если на отрезке $AO = R$ (рис. Р.2.4), как на диаметре, построить окружность, то она пересечет стороны AC и AB в точках F и E , являющихся серединами AC и AB соответственно. Отсюда построение: на отрезке $AO = R$ строим, как на диаметре, окружность. Из точки A раствором циркуля, равным $\frac{b}{2}$, делаем засечку. Продолжаем AF за точку F на расстояние $\frac{b}{2}$ и получаем точку C .

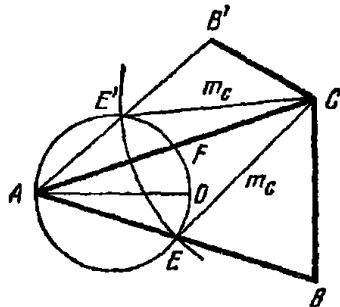


Рис. Р.2.4.

Из нее проводим дугу радиусом m_c . Задача имеет два решения: треугольник ABC и треугольник $AB'C$, если дуга EE' пересекает окружность, построенную на AO ; одно решение, если дуга касается окружности, и не имеет решения, если общих точек у дуги и окружности нет.

2.5. Так как углы OBO_1 и OCO_1 (рис. Р.2.5) прямые, то вершины B и C треугольника лежат на окружности, построенной на отрезке OO_1 , как на диаметре. Центр этой окружности обозначим буквой Q .

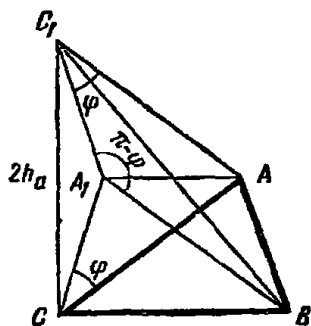


Рис. Р.2.3.

Фигура $AFGH$, где отрезок GH параллелен KC , будет подобна искомой с центром подобия в точке A . Строим вершину E , которая должна лежать на прямых BC и AG одновременно. Проводим DE параллельно FG .

Четырехугольник $ADEC$ искомый.

Задача всегда имеет единственное решение.

2.7. Проведем через точку M прямую AB так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делился в точке M пополам. Для этого построим MC параллельно OA

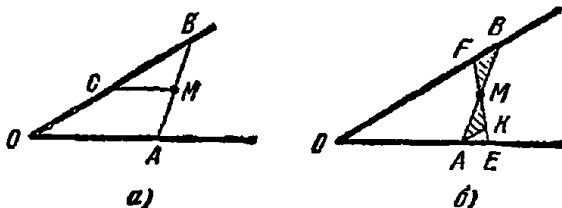


Рис. P.2.7.

(рис. P.2.7, а) и отложим $CB = OC$. Так как CM — средняя линия в треугольнике OBA , то $BM = MA$.

Итак, пусть $AM = MB$ (рис. P.2.7, б). Проведем произвольную прямую EF через точку M . Покажем, что площадь треугольника OAB меньше площади треугольника OEF . Проведем AK параллельно OB (если $FM < EM$). Треугольники AMK и BMF равны. Следовательно,

$$S_{OEF} = S_{OAMF} + S_{AMK} + S_{AEK} > S_{OAMF} + S_{BMF} = S_{OAB}.$$

2.8. Вместо искомого треугольника ABC построим вначале треугольник A_1AA_2 , который получается из ABC так, как показано на рис. P.2.8 ($A_1B = BA$, $A_2C = CA$). Угол A_1AA_2 этого треугольника равен $\alpha + \beta + A$. Однако $2\alpha = B$, а $2\beta = C$ (по свойству внешних углов). Поэтому

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + A &= \frac{B+C}{2} + A = \\ &= \frac{\pi - A}{2} + A = \frac{\pi + A}{2}. \end{aligned}$$

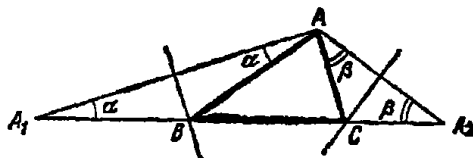


Рис. P.2.8.

Теперь в треугольнике A_1AA_2 известны основание $A_1A_2 = 2r$, высота, равная h_a , и угол при вершине, равный $\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$.

Вершина A будет лежать на пересечении прямой, параллельной A_1A_2 и отстоящей от A_1A_2 на расстоянии h_a , и сегмента, построенного на отрезке A_1A_2 и вмещающего угол $\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$.

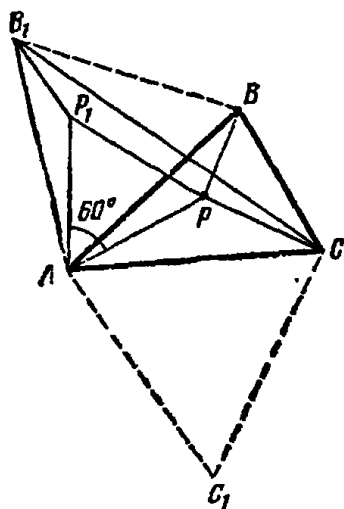


Рис. P.2.9.

Вершины B и C лежат на пересечении A_1A_2 и перпендикуляров, проведенных через середины A_1A и A_2A .

Задача может иметь два симметричных решения, если высота меньше стрелки сегмента, одно решение, если они равны, и не имеет решений, если h_a больше стрелки сегмента.

2.9. Пусть P — искомая точка. Повернем треугольник ABP на 60° вокруг точки A . При этом точка P перейдет в точку P_1 , а точка B — в точку B_1 (рис. P.2.9). Так как угол P_1AP равен 60° и $AP_1 = AP$, то треугольник P_1AP правильный и $AP = P_1P$. Таким образом, B_1P_1PC — ломаная, составленная из отрезков длины BP , AP и CP соответственно. Так как эта ломаная имеет закрепленные концы в точках B_1 и C_1 , то ее длина будет наименьшей, если она выпрямится в отрезок B_1C_1 .

Итак, точка P лежит на отрезке B_1C_1 . Аналогично можно показать, что точка P лежит на отрезке C_1B , вершина C_1 которого получена поворотом AC вокруг A на 60° .

Отсюда простое построение. На отрезках AB и AC строим правильные треугольники AB_1B и AC_1C , лежащие вне треугольника ABC . Искомая точка P будет лежать на пересечении прямых B_1C_1 и C_1B .

2.10. Если треугольник ABC искомым (рис. P.2.10), то описанная около него окружность пересечется с биссектри-

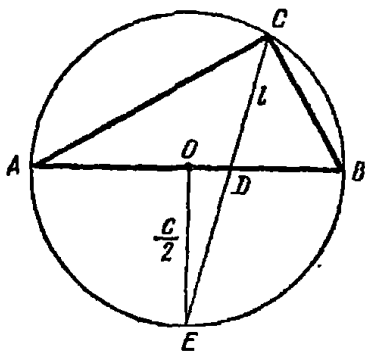


Рис. P.2.10.

$b > |c \sin \beta - a \sin \alpha|$), то задача имеет два различных решения $ABCD$ и ABC_1D_1 (CD и $C_1D_1 \parallel EF$), причем один четырехугольник будет самопересекающимся. При $b = |c \sin \beta - a \sin \alpha|$ решение единственно, а при $b < |c \sin \beta - a \sin \alpha|$ искомого четырехугольника не существует.

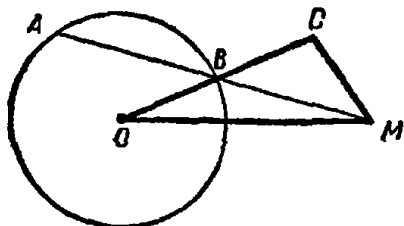


Рис. P.2.12.

2.12. На отрезке OM (рис. P.2.12) строим треугольник OCM , сторона OC которого равна $2R$, а сторона CM равна R .

Точку пересечения OC с окружностью обозначим через B . Секущая AM искомая.

Задача имеет два решения, если $MO < 3R$, одно решение, если $MO = 3R$, и не имеет решения, если $MO > 3R$.

2.13. Соединим центры O и O_1 данных окружностей и построим на OO_1 , как на гипотенузе, прямоугольный треугольник OEO_1 , один из катетов которого (EO_1) равен $\frac{a}{2}$. Через

точку M пересечения окружностей, лежащую по ту же сторону от OO_1 , что и построенный прямоугольный треугольник, проводим прямую, параллельную катету длины $\frac{a}{2}$. Отрезок AB (рис. P.2.13) будет искомым.

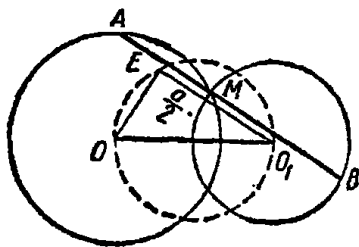


Рис. P.2.13.

Задача имеет четыре решения, если $\frac{a}{2} < OO_1$, два решения, если $\frac{a}{2} = OO_1$, и не имеет решений, если $\frac{a}{2} > OO_1$.

2.14. Построение. Проводим через точку M окружность, concentricкую данной. На этой окружности строим хорду длины a , проходящую через точку M . Задача может иметь два или одно решение ($a \leq 2MO$), а может и не иметь решения вовсе ($a > 2MO$).

2.15. Если отрезок PQ (рис. P.2.15) перенести параллельно в отрезок B_1B , то из искомой точки P отрезок AB_1 будет виден под углом, равным углу AMB , величина которого

то задача имеет единственное решение, которое очевидно, но не может быть получено описанным способом. Когда точки A и P лежат по разные стороны PQ , задача не имеет решения.

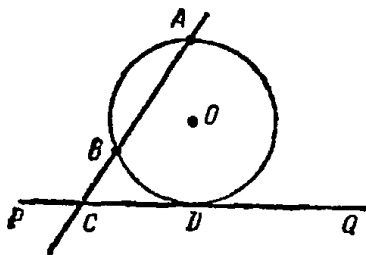


Рис. P.2.17.

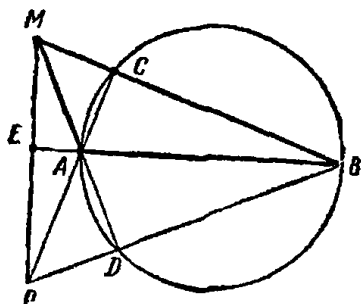


Рис. P.2.18.

2.18. Отрезки MB и MA пересекают данную окружность в точках C и D (рис. P.2.18), которые являются основаниями высот треугольника AMB , опущенных из его вершин A и B . Отрезок MP , проведенный через точку P пересечения AC и BD , будет искомым перпендикуляром.

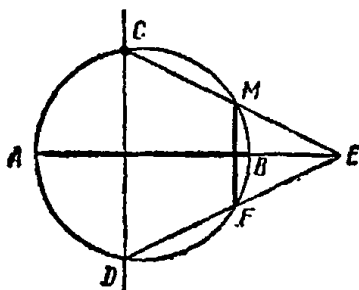


Рис. P.2.19.

Задача имеет решение, если точка M не лежит на прямой AB .

2.19. Предыдущая задача позволяет построить некоторый перпендикуляр к диаметру AB , пересекающий данную окружность в точках, которые мы обозначим буквами C и D (рис. P.2.19). Проведем прямую CM ; она пересечет диаметр AB (или его продолжение) в точке E . Проведем ED . В пересечении ED и данной окружности получим точку F ; MF — искомый перпендикуляр.

Глава 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. На луче, перпендикулярном к MN , возьмем произвольную точку A (рис. P.3.1). Спроектируем OA на плоскость P , а полученный отрезок OB — на второй из данных

лучей. Треугольник ACO прямоугольный (по теореме о грех перпендикулярах).

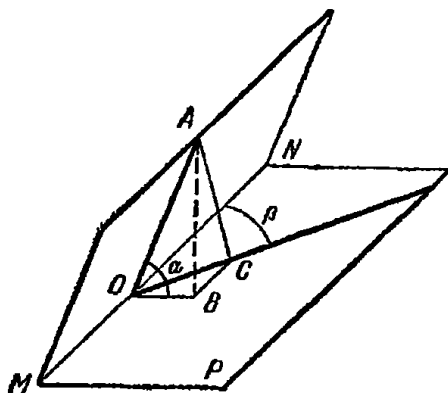


Рис. P.3.1.

Косинус искомого угла AOC равен $\frac{OC}{OA}$. Используя построенные треугольники, можно выразить OC через OA :

$$OC = OB \sin \beta = OA \cos \alpha \sin \beta.$$

Ответ. $\arccos(\cos \alpha \sin \beta)$.

3.2. Спроектируем данный треугольник ABC на плоскость P (рис. P.3.2) и построим угол CED , равный x , между плоскостью треугольника и плоскостью P . Введем в рассмотрение линейный элемент $CD = a$. Тогда

$$AC = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad BC = \frac{a}{\sin \beta},$$

$$CE = \frac{a}{\sin x}.$$

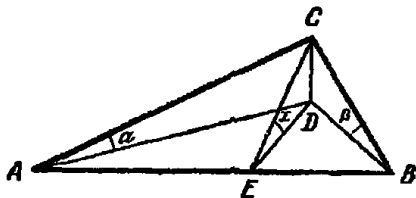


Рис. P.3.2

Так как CE — высота в треугольнике ABC , опущенная на гипотенузу, то (из сравнения площадей)

$$AC \cdot BC = CE \cdot AB,$$

или

$$AC \cdot BC = CE \sqrt{AC^2 + BC^2}.$$

Подставляя вычисленные раньше значения AC , BC и CE , получим

$$\frac{a}{\sin \alpha} \cdot \frac{a}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin x} \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{a^2}{\sin^2 \beta}},$$

откуда

$$\sin x = \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}.$$

Так как угол x по построению всегда острый, то он определяется однозначно.

Ответ. $\arcsin \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$.

3.3. Из некоторой точки B_1 стороны угла α опустим перпендикуляр BB_1 на плоскость P (рис. Р.3.3). Через B_1

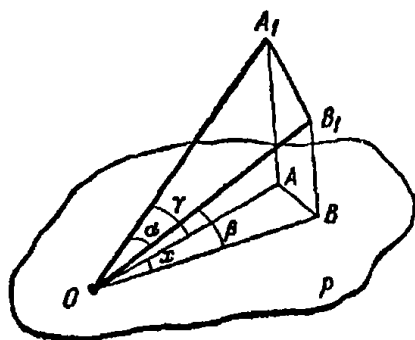


Рис. Р.3.3.

проведем плоскость, параллельную плоскости P . Она пересечет другую сторону угла α в некоторой точке A_1 . Через BB_1 и A проведем плоскость, которая будет перпендикулярна к плоскости P .

Отрезки AA_1 и BB_1 равны. Обозначим $AA_1 = BB_1 = a$. Теперь можно вычислить все стороны треугольника OAB и воспользоваться теоремой косинусов, чтобы найти угол x .

Стороны OA и OB вычислить просто:

$$OA = a \operatorname{ctg} \gamma, \quad OB = a \operatorname{ctg} \beta.$$

Сторона AB равна A_1B_1 в треугольнике OA_1B_1 . Так как

$$OA_1 = \frac{a}{\sin \gamma}, \quad \text{а} \quad OB_1 = \frac{a}{\sin \beta},$$

то по теореме косинусов

$$AB^2 = A_1B_1^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \beta} + \frac{a^2}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{a^2}{\sin \beta \sin \gamma} \cos \alpha.$$

Воспользуемся теоремой косинусов еще раз, но уже для треугольника OAB :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos x.$$

Подставляя сюда найденные выше выражения для OA , OB и AB , получим уравнение относительно $\cos x$. Решая

его, после несложных тригонометрических преобразований найдем $\cos \alpha$.

Ответ.
$$\frac{\cos \alpha - \sin \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma}$$

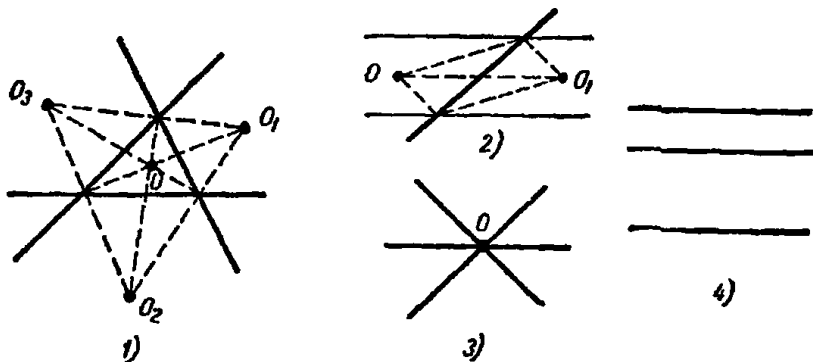


Рис. Р.3.4а.

3.4. Построим плоскость P , перпендикулярную к прямой a , и спроектируем на нее прямые b , c и d . Искомая прямая параллельна a , т. е. должна спроектироваться в точку O на плоскости P . Точка O будет одинаково удалена от проекций b_1 , c_1 и d_1 трех этих прямых.

Поскольку прямые a , b , c и d скрещивающиеся, ни одна из прямых b , c и d не может спроектироваться в точку на плоскости P , так как иначе она оказалась бы параллельной прямой a .

Проекции никаких двух прямых из b , c , d не сольются, так как это означало бы, что эти две прямые лежат в одной плоскости. Поэтому проекции b_1 , c_1 и d_1 могут располагаться на плоскости P лишь одним из четырех способов (рис. Р.3.4а).

В первом случае (проекции образуют треугольник) мы получим четыре точки, равноотстоящие от b_1 , c_1 и d_1 . Это — центры вписанной и внеписанных окружностей. Проводя через

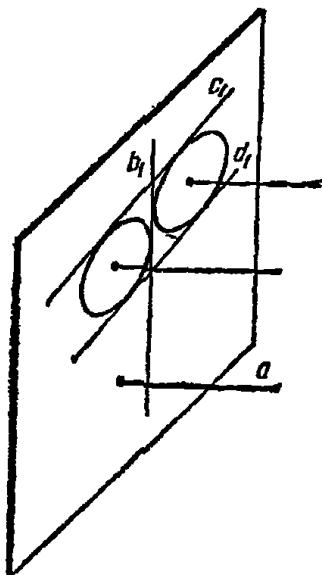


Рис. Р.3.4б.

или

$$m^2 - l^2 = a^2 - b^2. \quad (1)$$

Точно так же приравняем выражения для отрезка AP^2 , полученные из треугольников MAP и ABP :

$$(m + l)^2 - a^2 = b^2 + AB^2.$$

Вспомнив, что по условию $AB^2 = 2ab$, получим $(m + l)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, т. е.

$$m + l = a + b. \quad (2)$$

Разделив почленно равенство (1) на равенство (2), получим

$$m - l = a - b, \quad (3)$$

а решая систему из уравнений (2) и (3), найдем $m = a$, $b = l$, что и требовалось доказать.

3.7. Обозначим через PQ (рис. Р.3.7) прямую, по которой пересекаются грани AOD и BOC , а через RS — прямую, по которой пересекаются грани AOB и DOC . Прямые PQ и RS определяют плоскость P . Через произвольную точку M на AO проведем плоскость, параллельную плоскости P . Фигура $MNKL$, получившаяся в сечении, будет параллелограммом.

В самом деле, $MN \parallel PQ$ и $LK \parallel PQ$, а $ML \parallel RS$ и $NK \parallel RS$, как прямые, получившиеся в результате пересечения двух параллельных плоскостей третьей. Следовательно, $MN \parallel LK$ и $ML \parallel NK$, что и требовалось доказать.

3.8. Продолжим ED и CB (рис. Р.3.8) до пересечения в точке F и проведем AF — ребро двугранного угла, косинус которого нужно найти.

Так как $EC = 2DB$ (по условию), то DB — средняя линия в треугольнике EFC . Поэтому $FB = BC = a$. Поскольку $BA = a$, то треугольник FBA равнобедренный. Сумма его углов, прилежащих к FA , равна 60° , а угол BAF равен 30° .

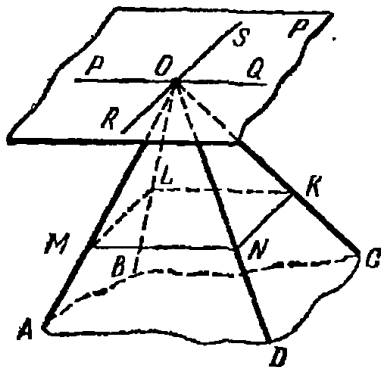


Рис. Р.3.7.

Мы убедились в том, что угол CAF прямой, а следовательно, линейный угол EAC измеряет искомый двугранный угол. Теперь остаются простые вычисления:

$$EA = \sqrt{EC^2 + AC^2} = a\sqrt{3}, \quad \cos \angle EAC = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

По теореме о трех перпендикулярах отрезки EA и FA взаимно перпендикулярны; поэтому площадь треугольника EAF

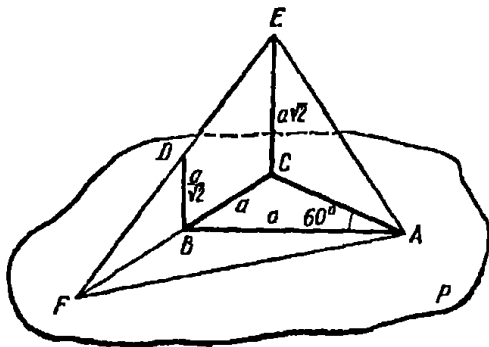


Рис. Р.3.8.

равна $\frac{1}{2} EA \cdot AF$, где $AF = a\sqrt{3}$. Итак, площадь треугольника EAF равна $\frac{3a^2}{2}$, и вследствие того, что $FD = DE$, площадь треугольника DEA в два раза меньше.

Ответ. $3a^2/4$, $1/\sqrt{3}$.

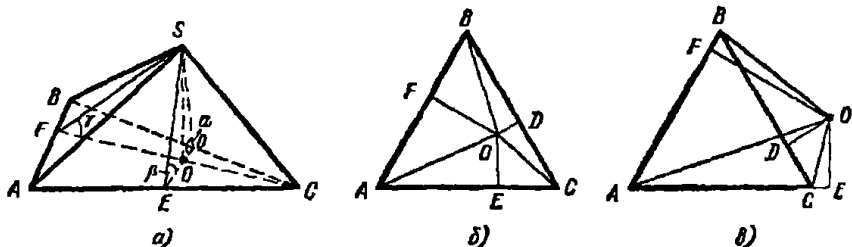


Рис. Р.3.9.

3.9. Обозначим высоту SO пирамиды через H . Предположим, что вершина пирамиды спроектируется в точку O , лежащую внутри треугольника ABC , и пусть углы SDO , SEO и SFO измеряют данные двугранные углы (рис. Р.3.9, а).

Рассмотрим отдельно треугольник ABC (рис. Р.3.9, б). Площадь его, с одной стороны, равна сумме площадей треугольников AOB , BOC и COA , а с другой стороны, равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Поэтому

$$\frac{1}{2} a (OF + OD + OE) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

т. е.

$$OF + OD + OE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Каждый из отрезков OF , OD и OE можно выразить через H :

$$OD = H \operatorname{ctg} \alpha, \quad OE = H \operatorname{ctg} \beta, \quad OF = H \operatorname{ctg} \gamma.$$

Следовательно,

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)}$$

Если точка O лежит вне треугольника ABC , то один из данных двугранных углов тупой (на рис. Р.3.9, в угол при BC , т. е. α). Следовательно, его котангенс будет отрицательным. Это соответствует тому факту, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABO и AOC за вычетом площади треугольника BOC . Таким образом, результат останется таким же, как в случае, когда O лежит внутри треугольника ABC .

Наконец, как легко убедиться, полученная формула дает верный результат и в том случае, когда точка O лежит на стороне треугольника ABC или совпадает с его вершиной. (Соответствующие котангенсы обращаются в нуль.)

$$\text{Ответ. } V = \frac{a^3}{8(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)}.$$

3.10. Так как $AC = BC$ по условию (рис. Р.3.10), то прямоугольные треугольники ADC и BDC равны и, следовательно, $AD = BD$. Треугольник ADB — равнобедренный, его медиана DE , проведенная из вершины D , будет одновременно и высотой. Таким образом, мы доказали, что двугранный угол при ребре AB измеряется линейным углом DEC , который обозначим через x .

Высота DO треугольника EDC будет высотой пирамиды. В самом деле, ребро AB перпендикулярно к ED и EO , т. е. к плоскости EDC . Отрезок DO , следовательно, перпендикулярен не только к EC , но и к AB , т. е. перпендикулярен к плоскости ABC .

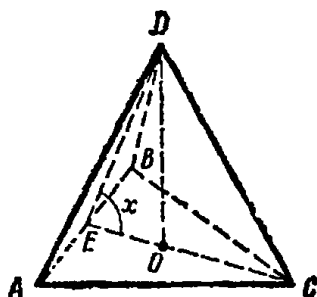


Рис. Р.3.10.

Заметим также, что CD — перпендикуляр к плоскости ADB , а поэтому треугольник EDC прямоугольный с прямым углом при вершине D .

Мы знаем, что $V = \frac{1}{3} S \cdot OD$.

Отрезок OD равен $ED \sin x$, а отрезок ED в свою очередь равен $EC \cos x$, т. е. $\frac{2S}{a} \cos x$.

Итак,

$$V = \frac{1}{3} S \cdot \frac{2S}{a} \cos x \sin x,$$

откуда $\sin 2x = \frac{3Va}{S^2}$.

Чтобы найти x , заметим, что угол x острый.

Ответ. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{3aV}{S^2}$.

3.11. Так как площадь основания равна $\sqrt{3}$, то сторона основания равна 2. Из треугольника AOS (рис. Р.3.11) находим $AO = b \cos x$; с другой стороны,

$$AO = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = b \cos x.$$

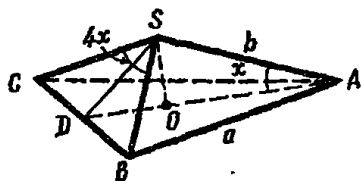


Рис. Р.3.11.

Из треугольника CDS находим $CD = \frac{a}{2} = b \sin 2x$. Разделив второе соотношение на первое, получим

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Так как $SD = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} 2x$, то нужно вычислить $\operatorname{ctg} 2x$:

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1} = \sqrt{\frac{16}{3} - 1} = \sqrt{\frac{13}{3}}, \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{5}{\sqrt{39}}.$$

Следовательно, $SD = \frac{5}{\sqrt{39}}$, а площадь боковой поверхности равна $\frac{3}{2} a \cdot SD$.

Ответ. $\frac{15}{\sqrt{39}}.$

3.12. На рис. Р.3.12. треугольники AEC и C_1EA_1 подобны, так как медианы AE и CE делятся точками C_1 и A_1 в одинаковом отношении 2:1.

Поэтому $C_1A_1 = \frac{1}{3} AC$. Аналогично доказывается, что $B_1A_1 = \frac{1}{3} AB$ и $C_1B_1 = \frac{1}{3} BC$ и т. д., т. е. площади S_1 и S оснований пирамиды относятся, как 1:9. Подобные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в параллельных плоскостях, так как их стороны параллельны. Следовательно, высоты DN и D_1N_1 , проведенные в тетраэдрах, параллельны и прямоугольные

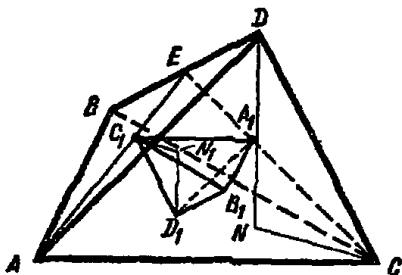


Рис. Р.3.12

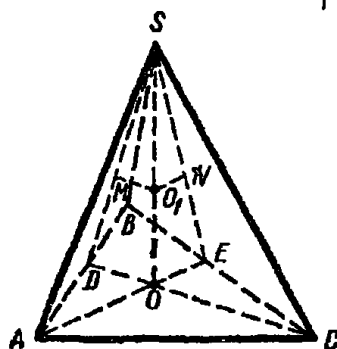


Рис. Р.3.13.

треугольники DNC и $D_1N_1C_1$ подобны, т. е. $D_1N_1 = \frac{1}{3} DN$. Остается сравнить объемы $\frac{V_1}{V} = \frac{S_1 \cdot D_1N_1}{S \cdot DN}$.

Ответ. $\frac{1}{27}.$

3.13. Пусть O_1 — центр шара, а O , M и N — точки касания (рис. Р.3.13). Проведем плоскость через MO_1 и OO_1 . Эта плоскость перпендикулярна к плоскости ASB и к плоскости ABC . Следовательно, она перпендикулярна к прямой AB . Отсюда следует, что наша плоскость пересечет ASB по прямой, перпендикулярной к AB и проходящей через точку M , которая по условию является

точкой пересечения высот грани ASB , т. е. по высоте треугольника ASB . Аналогично доказывается, что пересечение плоскости с плоскостью основания — тоже высота треугольника ABC .

Итак, точки S , O_1 и O лежат в плоскости DSC . Так же можно показать, что эти точки лежат в плоскости ASE . Так как две несовпадающие плоскости могут пересекаться только по одной прямой, то точки S , O_1 и O лежат на одной прямой и отрезок SO является высотой пирамиды.

Повернем треугольник SOD так, чтобы его плоскость совпала с плоскостью треугольника SOE . Так как треугольники SO_1M и SO_1N равны (по катету и гипотенузе), то равны углы DSO и ESO . Следовательно, треугольники SOD и SOE равны (по катету и острому углу) и при повороте совпадут. Тем самым мы установили, что точка O — центр вписанного в треугольник ABC круга. По условию точка O является также точкой пересечения высот треугольника ABC . Следовательно, треугольник ABC правильный и пирамида $SABC$ правильная. Отсюда, в частности, следует, что плоские углы при вершине S равны $\frac{\alpha}{3}$.

Перейдем к вычислительной части задачи. Обозначим угол SDO через β . Тогда $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{OO_1}{OD} = \frac{6r}{a\sqrt{3}}$, где через a обозначена сторона основания.

Выразим $\cos \beta$ через функции угла α . Из треугольника ASD находим $SD = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{6}$. Теперь из треугольника SDO можно найти

$$\cos \beta = \frac{OD}{SD} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{6}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{6}.$$

По формуле тангенса половинного угла имеем

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}(\alpha/6)}{\sqrt{3} + \operatorname{tg}(\alpha/6)}} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{6}\right)}}.$$

Сравнивая это выражение с предыдущим результатом

для $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, найдем

$$a = \frac{6r}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = 2\sqrt{3}r \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{6}\right)}}.$$

Из треугольника ASD находим

$$AS = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{6}}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{3}r}{\sin \frac{\alpha}{6}} \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{6}\right)}}.$

3.14. Построим пирамиду до полной. Все параллельные сечения пирамиды подобны. Составим схематический чертеж (рис. Р.3.14), на котором A и B — стороны квадратов, равновеликих основаниям, M — сторона квадрата, равновеликого сечению, проходящему через середину высоты данной усеченной пирамиды. Последнее условие мы запишем так:

$$H - h_2 = \frac{H - h_1}{2}, \text{ т. е. } h_2 = \frac{H + h_1}{2}.$$

Из подобия треугольников, изображенных на рис. Р.3.14, следует, что

$$\frac{A}{B} = \frac{H}{h_1}, \quad \frac{M}{B} = \frac{h_2}{h_1},$$

откуда

$$A = \frac{H}{h_1} B, \quad M = \frac{h_2}{h_1} B.$$

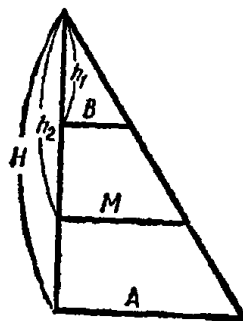


Рис. Р.3.14.

Составим среднее арифметическое величин A и B :

$$\frac{A+B}{2} = \frac{\frac{H}{h_1} B + B}{2} = \frac{H+h_1}{2h_1} B = \frac{h_2}{h_1} B = M,$$

что и требовалось доказать.

3.15. Построим треугольник ABC до параллелограмма $ABCE$ (рис. Р.3.15). Угол DAE равен углу между AD и BC . Обозначим его через x .

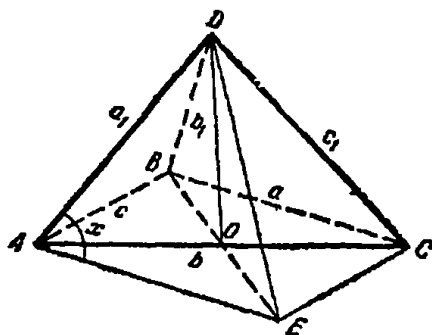


Рис. Р.3.15.

В треугольнике DAE

$$AD = a_1, \quad AE = a.$$

Вычислим DE . Так как в дальнейшем мы воспользуемся теоремой косинусов, то удобнее находить DE^2 .

Отрезок DO является медианой в треугольниках ADC и BDE :

$$4OD^2 = 2a_1^2 + 2c^2 - b^2,$$

$$4OD^2 = 2b_1^2 + 2DE^2 - BE^2.$$

Чтобы найти ED^2 , достаточно вычислить BE^2 . Но BE — диагональ параллелограмма $ABCE$, т. е.

$$BE^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2.$$

Следовательно,

$$DE^2 = a_1^2 + c^2 - b^2 + a^2 + c^2 - b^2.$$

Применим к треугольнику ADE теорему косинусов:

$$DE^2 = a_1^2 + a^2 - 2aa_1 \cos x.$$

Приравняв два выражения для DE^2 , найдем $\cos x$. При этом следует иметь в виду, что, по определению угла между скрещивающимися прямыми, x — острый угол.

Ответ. $\frac{|b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2|}{2aa_1}.$

3.16. Плоскость ABE (рис. Р.3.16) делит тетраэдр на две пирамиды $SABE$ и $CABE$ с общим основанием ABE . Так как отношение объемов дано, а

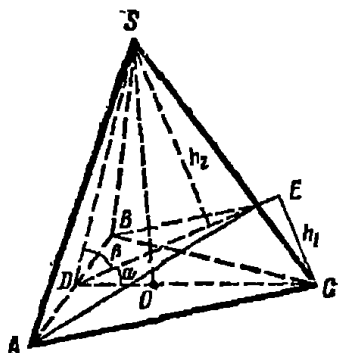


Рис. Р.3.16.

основание у пирамиды общее, то $\frac{h_2}{h_1} = \frac{5}{3}$, а в силу

равенства SD и CD

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{3}{5}, \quad \text{т. е.} \quad \sin \alpha = \frac{3}{5} \sin \beta.$$

Кроме того, так как тетраэдр правильный, углы α и β образуют угол SDO , косинус которого равен $\frac{1}{3}$. Поэтому

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}.$$

Выразив в этом уравнении $\sin \beta$ и $\cos \beta$ через $\sin \alpha$ (так как пирамида правильная, углы α и β острые), получим

$$\sqrt{1 - \frac{25}{9}y} \sqrt{1 - y} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}y,$$

где $y = \sin^2 \alpha$.

Возведем в квадрат и раскроем скобки; найдем $y = \frac{2}{11}$ и вычислим $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Поскольку $\sin^2 \beta = \frac{25}{9} \sin^2 \alpha = \frac{50}{99}$, то аналогично найдем $\operatorname{tg} \beta$.

Ответ. $\frac{5\sqrt{2}}{7}, \frac{\sqrt{2}}{3}$.

3.17. Треугольники DAM и DMS (рис. Р.3.17) имеют общую высоту, проведенную из вершины D . Поэтому отношение их площадей равно отношению оснований AM и MS .

Из подобия треугольников MSF и ASK следует, что

$$AM:MS = KF:FS.$$

Отрезки KF и FS выразим через KE . По теореме синусов для треугольника KFE имеем

$$KF = KE \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

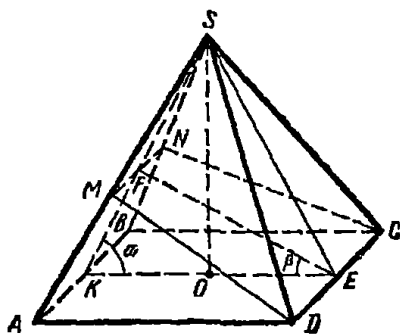


Рис. Р.3.17.

Так как $KS = \frac{KE}{2 \cos \alpha}$, то

$$\begin{aligned} FS &= KS - KF = \frac{KE}{2 \cos \alpha} - KE \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \\ &= KE \frac{\sin (\alpha - \beta)}{2 \cos \alpha \sin (\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

(впрочем, это можно установить и непосредственно из треугольника EFS).

Остается найти отношение $KF:FS$.

Ответ. $\frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$.

3.18. По условию высота DO пирамиды проходит через точку пересечения высот основания. Поэтому, соединив

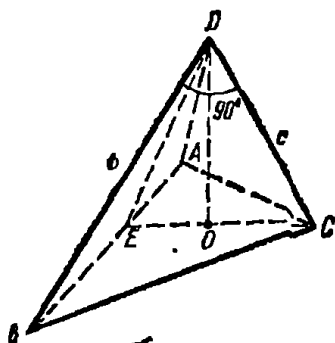


Рис. Р.3.18.

точку O с вершиной C и продолжив до пересечения с AB , получим отрезок CE , являющийся высотой треугольника ABC , опущенной на сторону AB (рис. Р.3.18). Прямая AB перпендикулярна к DO и EC , следовательно, прямые AB и CD тоже перпендикулярны друг другу. Таким образом, прямая CD перпендикулярна к двум прямым BD и AB плоскости ABD , а потому перпендикулярна к прямой AD . Мы доказали, что угол ADC

прямой. Аналогично доказывается, что прямые BD и AD тоже перпендикулярны.

Теперь нетрудно ответить на вопрос задачи: площадь треугольника ADB равна $\frac{1}{2} b \cdot AD$, а площадь треугольника ADC равна $\frac{1}{2} c \cdot AD$. Отношение площадей равно отношению неравных катетов.

Ответ. $\frac{b}{c}$.

3.19. Объем пирамиды $SABC$ (рис. Р.3.19) равен удвоенному объему пирамиды с основанием DSC и высотой AD .

никах ASB и CSB . Из треугольника SOD

$$OS = SD \sin \alpha = \frac{AB}{2} \sin \alpha, \quad OD = \frac{AB}{2} \cos \alpha.$$

В треугольнике COE угол OEC прямой, а угол OCE равен 45° . Поэтому

$$OE = \frac{OC}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (CD - OD) = \frac{AB}{2\sqrt{2}} (1 - \cos \alpha.)$$

Теперь можно найти тангенс искомого угла:

$$\operatorname{tg} x = \frac{OS}{OE} = \sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Если угол α тупой, то (рис. Р.3.20, б) снова получим,

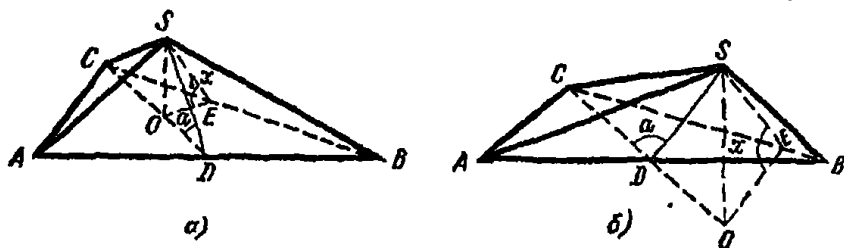


Рис. Р.3.20.

что $CD = SD = \frac{AB}{2}$. Высота OS равна

$$OS = SD \sin (\pi - \alpha) = \frac{AB}{2} \sin \alpha,$$

отрезок OD равен

$$OD = SD \cos (\pi - \alpha) = -\frac{AB}{2} \cos \alpha$$

(угол α тупой и $\cos \alpha < 0$). Треугольник COE тоже прямоугольный и равнобедренный. Поэтому

$$OE = \frac{CO}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (CD + OD) = \frac{AB}{2\sqrt{2}} (1 - \cos \alpha).$$

Так как для OE и OS получились такие же значения, как в первом случае, то и окончательный результат не изменится.

$$\text{Ответ. } x = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

3.21. Проведем в треугольнике ABC (рис. Р.3.21) высоту BD и соединим точку D с вершиной S пирамиды. Так как ребро SB образует равные углы с ребрами SC и SA , то SD — биссектриса угла ASC .

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD . В нем

$$AD = SA \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}, \quad AB = SA \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

т. е.

$$\cos x = \frac{AD}{AB} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

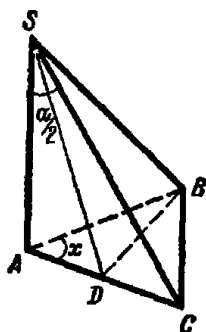


Рис. Р.3.21.

Так как α — угол прямоугольного треугольника, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, а потому $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} < \operatorname{tg} \alpha$ и правая часть уравнения меньше единицы.

$$\text{Ответ. } x = \arccos \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

3.22. Пусть M — середина AB . Тогда медианы CM и DM (рис. Р.3.22) являются одновременно высотами в равнобедренных треугольниках ABC и ABD . Следовательно, прямая AB перпендикулярна к плоскости CMD , а потому и к прямой CD , лежащей в этой плоскости. Треугольник CMD равнобедренный, так как CM и MD — медианы, проведенные к общей стороне в равных треугольниках. Следовательно, его высота MK будет одновременно медианой. Итак, отрезок KM , соединяющий середины AB и CD , есть общий перпендикуляр к этим ребрам. Поэтому центр описанного около тетраэдра $ABCD$ шара должен лежать на этом отрезке.

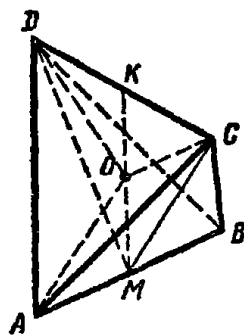


Рис. Р.3.22.

Из треугольников MDV и MDK последовательно находим $MD = \sqrt{65}$, $MK = 7$. С другой стороны, из треугольников OKD и AMO находим $MK = KO + MO = \sqrt{R^2 - 16} + \sqrt{R^2 - 9}$.

Получаем уравнение

$$\sqrt{R^2 - 16} + \sqrt{R^2 - 9} = 7.$$

Ответ. $R = 5$.

3.23. Проведем через точку O (рис. Р.3.23) сечение B_1EC_1 пирамиды, перпендикулярное к стороне SA . Тогда угол B_1EC_1 равен α , а $OE = a$.

Так как пирамида правильная, то в силу симметрии треугольник B_1EC_1 равнобедренный, а B_1C_1 и BC параллельны.

Чтобы связать высоту SO с элементами треугольника B_1EC_1 , рассмотрим треугольник SOA , для которого воспользуемся сравнением площадей:

$$SO \cdot OA = OE \cdot SA. \quad (1)$$

Выразим все участвующие в этом соотношении отрезки через a , α и h :

$$SO = h; \quad OE = a;$$

$$OA = OC_1 \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$\begin{aligned} AS &= \sqrt{SO^2 + OA^2} = \\ &= \sqrt{h^2 + 3a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

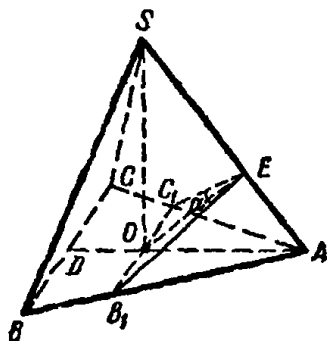


Рис. Р.3.23.

Подставив в уравнение (1) и возведя затем обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$3h^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - h^2 = 3a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$h = \frac{\sqrt{3}a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}.$$

Чтобы привести это выражение к виду, удобному для логарифмирования, преобразуем выражение, стоящее в знаменателе под радикалом:

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 &= 3 \left[\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] = 3 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 3 \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{4 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } \frac{\sqrt{3} a \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{\sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right)}}.$$

3.24. Если в сечении образуется квадрат, то плоскость сечения пересекает все четыре грани пирамиды. Кроме того, отрезок KL параллелен MN , т. е. параллелен плоскости основания, а следовательно, и ребру AB .

Аналогично отрезки KM и LN параллельны ребру DC . Итак, если в сечении пирамиды — квадрат, то плоскость сечения должна быть параллельной двум скрещивающимся прямым, на которых лежат ребра AB и DC .

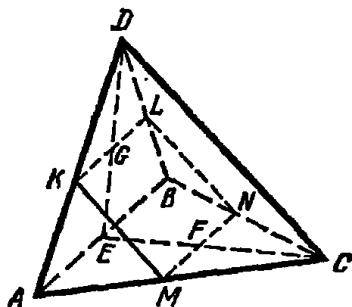


Рис. Р.3.24.

Докажем обратное: если провести сечение пирамиды, плоскость которого параллельна AB и DC , то в сечении получится прямоугольник. В самом деле, то, что это будет параллелограмм, устанавливается непосредственно. Спроектировав DC на плоскость основания (рис. Р.3.24), мы убедимся в том, что MN и EC взаимно перпендикулярны. Отсюда следует, что прямым будет угол между DC и MN , а значит, и между LN и MN . Таким образом, $KLMN$ — прямоугольник.

Мы доказали, что в сечении можно получить прямоугольник только с помощью плоскости, параллельной двум скрещивающимся ребрам.

Этот прямоугольник будет квадратом, если $MN = MK$. Из подобия треугольников ADC и AMK находим $\frac{MK}{CD} = \frac{AM}{AC}$, причем $CD = \sqrt{EC^2 + DE^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$, $AM = a - MC = a - MN$.

Подставляя в первоначальное отношение, получим

$$\frac{MK}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{a - MN}{a}.$$

Так как $MK = MN$, то получим уравнение относительно

стороны квадрата, из которого

$$MN = \frac{a \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2} + a}}.$$

Ответ. $\frac{a \sqrt{2b^2 + a^2}}{\sqrt{2b^2 + a^2} + a \sqrt{2}}.$

3.25. Расположим пирамиду так, как показано на рис. Р.3.25. Соединим вершину R_1 куба с вершинами пирамиды. Пирамида $ABCP$ разобьется на три пирамиды: R_1ABP , R_1ACP , R_1BCP , у которых общая вершина R_1 и одинаковая высота x , равная по длине ребру куба. Из сравнения объемов получим

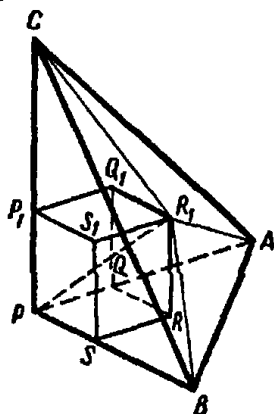


Рис. Р.3.25.

$$\frac{1}{6} abc = \frac{1}{6} (xab + xbc + xac),$$

откуда найдем x .

Ответ. $\frac{abc}{ab + bc + ac}.$

3.26. Верхнее основание куба будет вписано в равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$, подобный основанию ABC пирамиды (рис. Р.3.26). Выразим сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ через сторону вписанного квадрата:

$$\begin{aligned} A_1C_1 &= 2A_1E_1 + a = 2a \operatorname{ctg} 60^\circ + a = \\ &= a \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ тогда равна $\frac{a^2 (\sqrt{3} + 2)^2 \sqrt{3}}{12}$. Так как тре-

угольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и рас-

стояние первого от центра подобия равно h , а расстояние второго равно $h - a$, то отношение площадей равно

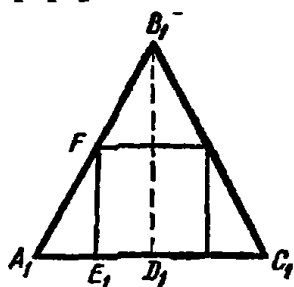


Рис. Р.3.26.

$$\frac{h^2}{(h - a)^2}.$$

Поэтому площадь треугольника ABC равна

$$\frac{a^2(\sqrt{3}+2)^2 h^2}{4\sqrt{3}(h-a)^2}.$$

Ответ. $\frac{a^2 h^2 (7+4\sqrt{3})}{12\sqrt{3}(h-a)^2}.$

3.27. Если $PP_1 = x$, то из подобия треугольников SOE и P_1PE (рис. Р.3.27) имеем

$$\frac{OS}{OE} = \frac{x}{PE}.$$

Выразим все входящие в последнее отношение отрезки через x и известные величины. Поскольку $OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

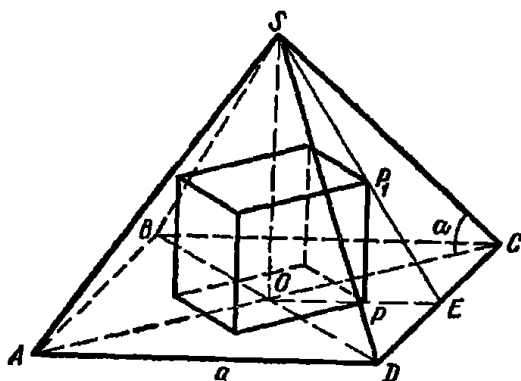


Рис. Р.3.27.

то $OS = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \alpha$. Отрезок $OE = \frac{a}{2}$, а $PE = OE - OP = \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, исходная пропорция превращается в уравнение относительно x , решая которое находим

$$x = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}(1 + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{a \sin \alpha}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}.$$

Ответ. $\frac{a \sin \alpha}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}.$

3.28. Осуществив построения, изображенные на рис. Р.3.28, постараемся вычислить объем данной пирамиды как удвоенный объем пирамиды $AODC$ с вершиной в точке A

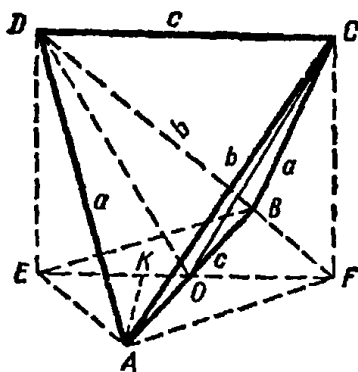


Рис. Р.3.28.

(равенство объемов $AODC$ и $BODC$ станет очевидным из дальнейшего). Докажем вначале, что $AFBE$ — прямоугольник. Из равенства треугольников CFB и DEA следует, что $EA = BF$. Аналогично $BE = FA$. Следовательно, $AFBE$ — параллелограмм. Но $EF = AB$, а потому эта фигура — прямоугольник. Чтобы найти площадь треугольника DOC , нужно вычислить его высоту CF , для чего достаточно знать стороны прямоугольника $AFBE$.

Отрезок CF может быть найден из двух прилежающих к нему прямоугольных треугольников. С одной стороны, $CF^2 = BC^2 - BF^2$, с другой стороны, $CF^2 = AC^2 - AF^2$, т. е. $BF^2 - AF^2 = a^2 - b^2$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} BF^2 + AF^2 = c^2, \\ BF^2 - AF^2 = a^2 - b^2, \end{cases}$$

из которой найдем

$$BF^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2), \quad AF^2 = \frac{1}{2}(c^2 - a^2 + b^2).$$

Теперь можно вычислить CF и AK :

$$CF^2 = a^2 - \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2),$$

$$AK = \frac{AE \cdot AF}{EF} = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)(c^2 - a^2 + b^2)}}{2c}.$$

Объем пирамиды $ABCD$ равен

$$2 \frac{1}{3} AK \cdot \left(\frac{1}{2} DC \cdot CF \right).$$

$$\text{Ответ. } \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(c^2 + a^2 - b^2)(c^2 - a^2 + b^2)}.$$

3.29. Расположим пирамиду $ABCD$ так, как показано на рис. Р.3.29, а. Воспользуемся методом сравнения объемов по отношению к телу $ANBMCD$.

С одной стороны, его можно рассматривать как составленное из двух пирамид с общим основанием $MNCD$ и с вершинами в точках A и B . Основание $MNCD$ — прямоугольник с известными сторонами. Высотами будут перпендикуляры AK и BL , опущенные на MN (рис. Р.3.29, б). Так как

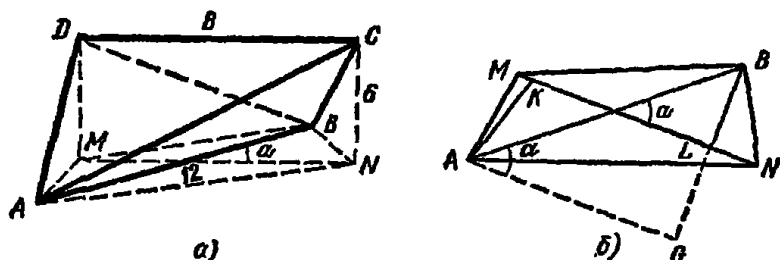


Рис. Р.3.29.

нам нужна сумма объемов двух пирамид с общим основанием, то выразим $AK + BL$ через AB и $\sin \alpha$. Тогда объем нашего тела будет выражен через α .

С другой стороны, $V_{ANBMCD} = V_{ABCD} + V_{ABMD} + V_{ABNC}$. Проведем $AG \parallel KL$ (рис. Р.3.29, б). Тогда

$$AK + BL = GB = 12 \sin \alpha, \quad S_{MNCD} = 6 \cdot 8 = 48,$$

$$V_{ANBMCD} = \frac{1}{3} S_{MNCD} (AK + BL) = 4 \cdot 48 \sin \alpha,$$

$$S_{MANB} = \frac{1}{2} AB \cdot NM \sin \alpha = 48 \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} V_{ABCD} + V_{ABMD} + V_{ABNC} &= 48 + \frac{6}{3} (S_{ABM} + S_{ABN}) = \\ &= 48 + 2S_{MANB} = 48 + 2 \cdot 48 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$48 + 2 \cdot 48 \sin \alpha = 4 \cdot 48 \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\sin \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\text{Ответ. } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

3.30. Поставим четырехугольную пирамиду $A_1BB_1C_1C$, в которую вписан шар, на основание BB_1C_1C (рис. Р.3.30). Пусть H — высота пирамиды, a — сторона основания. Радиусы окружностей с центрами O и O_1 равны R . Так как треугольник $B_1A_1C_1$ правильный, то $a = 2\sqrt{3}R$.

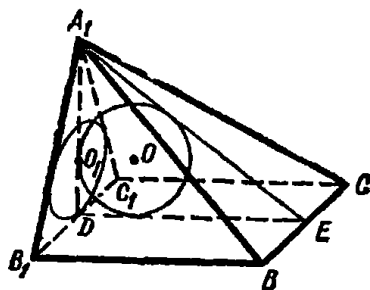


Рис. Р.3.30.

Рассмотрим треугольник DA_1E . Он прямоугольный и его площадь, с одной стороны, равна $\frac{1}{2} A_1D \cdot DE$, а с другой стороны, $\frac{R}{2} (A_1D + DE + A_1E)$. Поскольку

$$DE = H, \quad A_1D = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$A_1E = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + H^2},$$

получаем уравнение относительно H , которое после подстановки $a = 2\sqrt{3}R$ и возведения в квадрат принимает вид

$$H^2 = 4HR,$$

откуда $H = 4R$.

Ответ. $12\sqrt{3}R^3$.

3.31. Центр шара, касающегося трех ребер правильного тетраэдра, исходящих из общей вершины, должен лежать на биссектрисе соответствующего трехгранного угла, которая совпадает с высотой тетраэдра, опущенной из этой же вершины. Поскольку все четыре биссектрисы пересекаются в одной точке — центре вписанного в тетраэдр шара, достаточно рассмотреть треугольник SOA (рис. Р.3.31), где SO — высота тетраэдра, SA — его ребро, а O_1 — центр искомого шара и шара, вписанного в тетраэдр.

Треугольники SAO и SO_1D подобны. В первом известны все стороны, во втором $SO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Это позволяет вычислить R .

Ответ. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

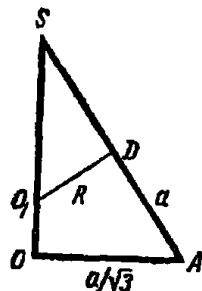


Рис. Р.3.31

3.32. Если один куб расположен внутри другого, а вершина O у них общая, то диагонали этих кубов, проходящие через O , лежат на одной прямой. Поэтому из всех подобных кубов, которые можно поместить в параллелепипед, мы выберем максимальный.

Пусть $c < a$ и $c < b$. Тогда в параллелепипед можно поместить куб с ребром c (рис. Р.3.32). Вычислим все стороны треугольника ABO и воспользуемся теоремой косинусов:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos x,$$

$$AO^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad BO^2 = 3c^2,$$

$$AB^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2.$$

Для определения $\cos x$ получим уравнение

$$\sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cos x = c + b + a,$$

которое симметрично относительно a , b и c , а потому не зависит от соотношения между этими величинами. Убедитесь сами в том, что $\cos x$ не будет больше единицы при любых a , b и c .

Ответ. $\arccos \frac{a+b+c}{\sqrt{3} \sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$

3.33. Разность углов A и C равна φ , BD — биссектриса угла B в треугольнике ABC (рис. Р.3.33). Вычислим угол α :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{B}{2} + C = \frac{\pi - A - C}{2} + C = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{C - A}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Объем призмы равен произведению AA_1 на площадь основания ABC , т. е.

$$\begin{aligned} AA_1 \left(\frac{1}{2} AD \cdot DB \sin \alpha + \frac{1}{2} DC \cdot DB \sin \alpha \right) &= \\ &= \frac{1}{2} AA_1 \cdot DB \cdot AC \sin \alpha = \frac{1}{2} aS \cos \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{1}{2} aS \cos \frac{\varphi}{2}.$

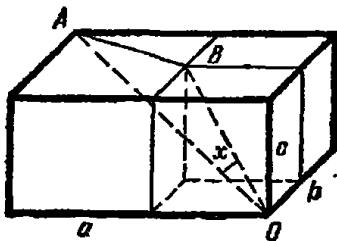


Рис. Р.3.32.

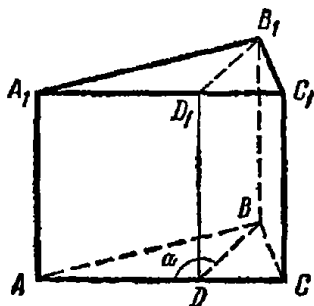


Рис. Р.3.33.

3.34. Пусть выбраны диагонали C_1D и B_1C (рис. Р.3.34). Так как $B_1C \parallel A_1D$ и $C_1D \parallel B_1A$, то плоскости A_1C_1D и AB_1C параллельны. Расстояние между B_1C и C_1D равно расстоянию между этими плоскостями.

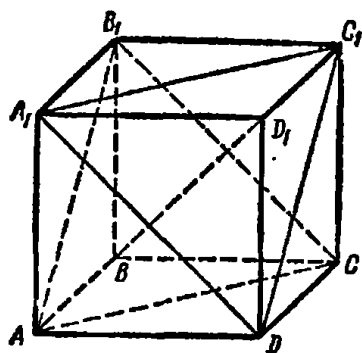


Рис. Р.3.34.

Обе плоскости A_1C_1D и AB_1C перпендикулярны к диагонали BD_1 . Поэтому искомое расстояние равно разности между отрезком BD_1 и удвоенной высотой пирамиды $D_1A_1C_1D$. Объем этой пирамиды равен $\frac{a^3}{6}$, а площадь основания

A_1C_1D равна $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$, следовательно,

но, высота $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Так как $BD_1 = a\sqrt{3}$, то искомое расстояние равно $a\sqrt{3} - \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

3.35. Из соображений симметрии ясно, что точка O лежит на диагонали AC_1 куба. Для доказательства достаточно установить, что плоскость KMN (рис. Р.3.35) перпендикулярна к AC_1 и что AC_1 проходит через точку O_1 , являющуюся центром треугольника KMN .

По теореме о трех перпендикулярах $AC_1 \perp BD$. Следовательно, $AC_1 \perp KN$. Аналогично прямая AC_1 перпендикулярна к KM или MN , т. е. AC_1 — перпендикуляр к плоскости KMN .

Треугольник KMN равносторонний. Так как $AK = AN = AM$, то из равенства соответствующих треугольников, имеющих общие вершины в точках A и O_1 , получаем $KO_1 = NO_1 = MO_1$.

Мы доказали, что центр O сферы лежит на продолжении отрезка AC_1 .

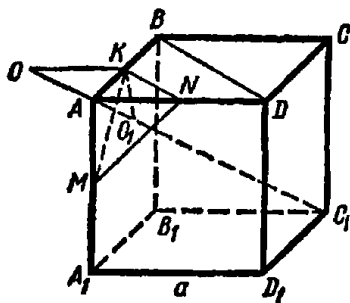


Рис. Р.3.35.

Так как AK — биссектриса в треугольнике OKO_1 , то $\frac{OK}{KO_1} = \frac{OA}{AO_1}$. Отсюда найдем $OK = R$, выразив остальные отрезки через ребро куба:

$$KO_1 = \frac{KN}{\sqrt{3}} = \frac{BD}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}, \quad AO_1 = \sqrt{AK^2 - KO_1^2} = \frac{a}{\sqrt{12}},$$

$$OA = OO_1 - AO_1 = \sqrt{OK^2 - KO_1^2} = AO_1 = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{6}} = \frac{a}{\sqrt{12}}.$$

Подставив все эти выражения в пропорцию $\frac{OK}{KO_1} = \frac{OA}{AO_1}$, получим уравнение относительно R . После простых преобразований это уравнение запишется в виде

$$6R^2 - 2\sqrt{6}aR - 3a^2 = 0.$$

Геометрический смысл имеет только положительный корень.

Ответ. $R = \sqrt{\frac{3}{2}}a$.

3.36. Пусть ребро тетраэдра равно a , тогда для решения задачи нужно выразить через a высоту цилиндра (рис. Р.3.36):

$$OO_1 = \sqrt{O_1B^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Объем цилиндра равен $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{8}$; объем тетраэдра $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Остается найти отношение объемов.

Ответ. $\frac{2}{3\pi}$.

3.37. Опишем около данной пирамиды конус с образующей l , высотой H и радиусом нижнего основания R . Объем конуса больше объема пирамиды. Если мы докажем, что объем конуса меньше куба образующей, то задача тем самым будет решена.

Введем в рассмотрение угол α между H и l . Тогда

$$H = l \cos \alpha, \quad R = l \sin \alpha,$$

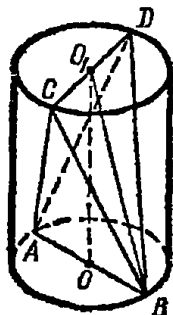


Рис. Р.3.36.

а объем конуса равен

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 H = \frac{\pi}{3} l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Составим отношение:

$$\frac{V}{l^3} = \frac{1}{3} \pi \sin^2 \alpha \cos \alpha = \frac{\pi}{6} \sin 2\alpha \sin \alpha \leq \frac{\pi}{6} < 1,$$

что и доказывает сформулированное в условии утверждение.

3.38. В осевом сечении конуса получим картину, изображенную на рис. Р.3.38. По условию $r = pR$. Из подобия треугольников EOB и FO_1B получим

$$\frac{r}{R} = \frac{H-2R-r}{H-R},$$

т. е.

$$H = \frac{2R^2}{R-r},$$

а из подобия треугольников ADB и OEB ($AB = l$) найдем

$$\frac{l}{\rho} = \frac{H-R}{R},$$

т. е.

$$l = \rho \frac{H-R}{R} = \rho \frac{1+p}{1-p}.$$

Так как $l^2 - \rho^2 = H^2$, получаем уравнение относительно ρ , решая которое находим $\rho^2 = \frac{R^2}{p}$. Полная поверхность конуса равна

$$\pi \rho (\rho + l).$$

С помощью производной пропорции из соотношения $\frac{l}{\rho} = \frac{H-R}{R}$ получим

$$\frac{l+\rho}{\rho} = \frac{H}{R}, \quad \text{т. е.} \quad (l+\rho)\rho = \rho^2 \frac{H}{R} = \frac{2R^2}{p(1-p)}.$$

Сумма поверхностей шаров равна

$$4\pi (R^2 + r^2).$$

Составим искомое отношение:

$$\frac{2(R^2 + r^2)\rho(\rho - l)}{R^2} = 2(1 + p^2)\rho(1 - p).$$

Ответ. $2\rho(1-p)(1+p^2)$.

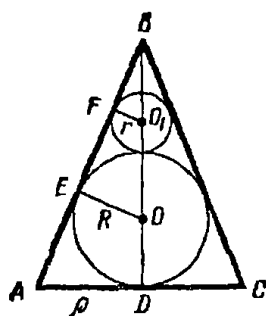


Рис. Р.3.38.

3.39. Обозначим радиус сферы через R и рассмотрим осевое сечение каждого из конусов. Второй конус можно расположить внутри сферы произвольным образом. Мы расположим его так, чтобы образующие обоих конусов были параллельны (рис. Р.3.39). Выразим радиусы оснований конусов через R .

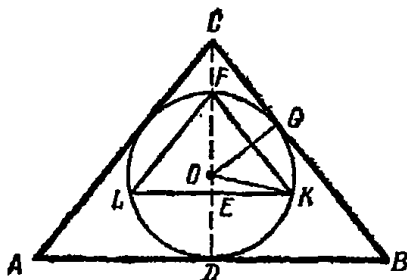


Рис. Р.3.39.

В треугольнике FOK углы OFK и OKF равны $\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, угол EOK равен их сумме, т. е. α . Из треугольника EOK находим $EK = R \sin \alpha$. Далее,

$$EF = EO + OF = R(1 + \cos \alpha),$$

$$CD = CO + OD = R \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right),$$

$$DB = DC \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Составим теперь отношение объемов и приравняем его к α . После простых преобразований придем к уравнению относительно α :

$$1 + \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sqrt[3]{a} \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

или

$$1 + \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sqrt[3]{a} \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

Так как $1 + \sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ (иначе не существует конус), то

$$2 \sqrt[3]{a} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sqrt[3]{a} \sin \frac{\alpha}{2} + 1 = 0,$$

откуда

$$\alpha = 2 \arcsin \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt[3]{a}}} \right) \right].$$

Так как $a > 0$, то выражение, стоящее под знаком арксинуса, как легко проверить, всегда расположено между 0 и 1. Чтобы можно было осуществить извлечение корня, необходимо взять $a \geq 8$.

Ответ. $\alpha = 2 \arcsin \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt[3]{a}}} \right) \right]$ при $a \geq 8$.

3.40. Боковая поверхность конуса равна $\pi r l$. Так как по условию $H=r$, то $l=r\sqrt{2}$. Получаем

$$\pi r^2 \sqrt{2} = \pi \sqrt{2},$$

откуда $r=1$.

Полная поверхность конуса равна

$$\pi \sqrt{2} + \pi r^2 = \pi (1 + \sqrt{2}),$$

а площадь полной поверхности пирамиды в два раза больше: $2\pi (1 + \sqrt{2})$. Так как высота каждой грани пирамиды равна $l=r\sqrt{2}=\sqrt{2}$, то полупериметр основания пирамиды равен

$$\frac{2\pi (1 + \sqrt{2})}{l+r} = 2\pi.$$

Так как радиус вписанной в основание пирамиды окружности равен единице, то площадь основания равна 2π .

Теперь определим объем пирамиды.

Ответ. $\frac{2\pi}{3}$.

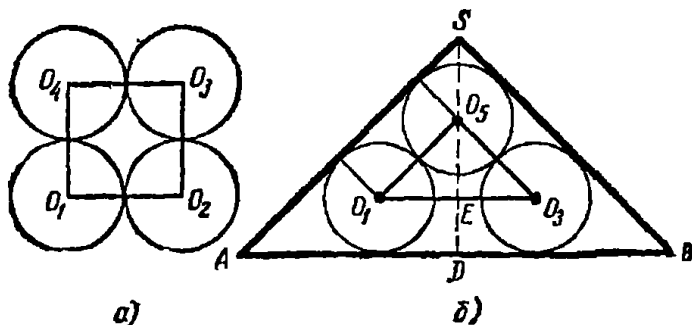


Рис. P.3.41.

3.41. Расстояние между центрами O_1 и O_3 двух не касающихся друг друга шаров равно $2r\sqrt{2}$ (рис. P.3.41, а). На рис. P.3.41, б изображено осевое сечение конуса, про-

ходящее через O_1 и O_3 . В этом же сечении будет лежать и O_5 . В треугольнике O_5O_1E сторона $O_1O_5 = 2r$, а $O_1E = r\sqrt{2}$, следовательно, $\frac{O_1E}{O_1O_5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. угол O_5O_1E равен 45° . Треугольник ASD подобен треугольнику O_1O_5E . Поэтому $H = R$. Найдем H :

$$H = SO_5 + O_5E + ED = \sqrt{2}r + \frac{2r}{\sqrt{2}} + r = r(2\sqrt{2} + 1).$$

Теперь можно найти и объем конуса:

$$V = \frac{\pi r^3}{3} (2\sqrt{2} + 1)^3.$$

Ответ. $\frac{\pi r^3}{3} (22\sqrt{2} + 25)$.

3.42. Так как ребро SD перпендикулярно к плоскости основания, то треугольник SCD (рис. Р.3.42, а), в который вписана окружность основания цилиндра, прямоугольный.

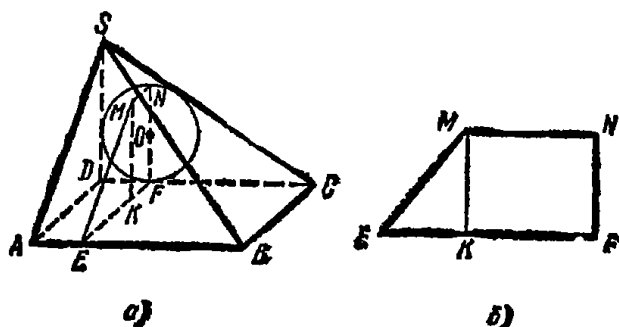


Рис. Р.3.42.

Радиус этой окружности равен площади треугольника SDC , деленной на полупериметр, т. е.

$$r = \frac{ah}{a + h + \sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Угол MEK равен углу SAD , так как треугольники MEK и SAD подобны. Из треугольника SAD находим, $\operatorname{ctg} \angle SAD = \frac{a}{h}$.

Следовательно, и $\operatorname{ctg} \angle MEK = \frac{a}{h}$. Для дальнейших рассуждений достаточно рассмотреть трапецию $EMNF$ (рис. Р.3.42, б).

Отрезок $MK = 2r$. Из треугольника MEK находим

$$EK = MK \operatorname{ctg} \angle MEK = \frac{2ra}{h}.$$

Искомый отрезок

$$KF = EF - EK = a - \frac{2ra}{h} = \frac{a(h-2r)}{h}.$$

Ответ. $\frac{a(\sqrt{a^2+h^2}+h-a)}{\sqrt{a^2+h^2}+h+a}.$

3.43. Пусть $OA = R$, $SO = H$, ребро куба равно a (рис. Р.3.43). Из подобия треугольников SOA и SO_1B получим

$$\frac{R}{H} = \frac{O_1B}{H - OO_1}.$$

Так как

$$OO_1 = a \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad O_1B = \frac{1}{2} a \sqrt{3},$$

то

$$\frac{R}{H} = \frac{a \sqrt{3}}{2H - a \sqrt{2}}.$$

Из подобия треугольников SO_1B и SO_2C

$$\frac{O_1B}{H - OO_1} = \frac{O_2C}{H - 2OO_1}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{a \sqrt{3}}{2H - a \sqrt{2}} = \frac{a}{2H - 2a \sqrt{2}}.$$

Упростим последнюю пропорцию и найдем из нее H :

$$H = \frac{a \sqrt{2} (2 \sqrt{3} - 1)}{2 \sqrt{3} - 2}.$$

С помощью первого соотношения определим теперь R :

$$R = \frac{Ha \sqrt{3}}{2H - a \sqrt{2}} = \frac{a}{2} (2 \sqrt{3} - 1).$$

Остается сосчитать отношение объемов:

$$\frac{\frac{1}{3} \pi R^2 H}{a^3}.$$

Ответ. $\frac{\pi \sqrt{2} (2 \sqrt{3} - 1)^3 (\sqrt{3} + 1)}{48}.$

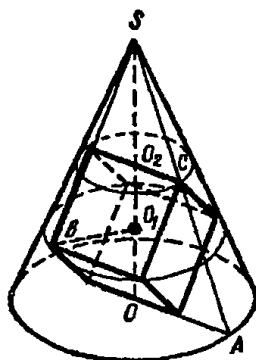


Рис. Р.3.43.

3.44. Обозначим через a сторону нижнего основания пирамиды, через b — сторону ее верхнего основания, а через S площадь боковой грани. Объем пирамиды можно записать так:

$$\frac{r}{3} \left[(a^2 + b^2) \frac{\sqrt{3}}{4} + 3S \right].$$

С другой стороны, объем равен

$$\frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{2r}{3} \left[(a^2 + b^2) \frac{\sqrt{3}}{4} + ab \frac{\sqrt{3}}{4} \right].$$

Приравнивая эти два выражения, найдем

$$S = (a + b)^2 \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Вспомним, что боковая грань — трапеция, боковые ребра которой равны верхнему основанию. Площадь этой трапеции легко найти, если вычислить ее высоту:

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3b^2 + 2ab - a^2},$$

$$S = \frac{1}{4} (a + b) \sqrt{3b^2 + 2ab - a^2}.$$

Сравнивая с предыдущим выражением для S , получим уравнение относительно $\frac{a}{b}$. После сокращения на $a + b$ (равенство суммы $a + b$ нулю не имеет геометрического смысла) и возведении в квадрат придем к выражению

$$2b^2 + ab - a^2 = 0,$$

или

$$\left(\frac{a}{b} \right)^2 - \frac{a}{b} - 2 = 0.$$

Так как a и b — положительные величины, то $\frac{a}{b} = 2$, или $a = 2b$.

Чтобы связать величины b и r , спроектируем точку C_1 на плоскость нижнего основания (рис. Р.3.44). Поскольку радиус описанной окружности треугольника ABC в два раза

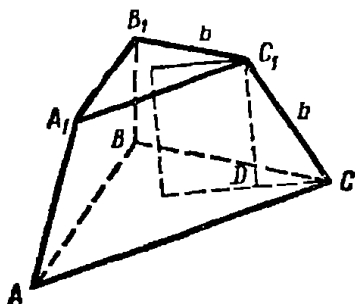


Рис. Р.3.44.

большее радиуса описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, то $DC = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

По теореме Пифагора для треугольника C_1DC

$$b^2 - \frac{b^2}{3} = 4r^2,$$

откуда

$$b = r\sqrt{6}, \quad a = 2b = 2r\sqrt{6}.$$

Остается вычислить объем:

$$V = \frac{2r}{3} \left[(a^2 + b^2) \frac{\sqrt{3}}{4} + ab \frac{\sqrt{3}}{4} \right] = 7\sqrt{3}r^3.$$

Ответ. $7\sqrt{3}r^3$.

3.45. Пусть O_1 и O_2 — центры меньших шаров, O_3 — центр большого шара, а O — центр шара, радиус которого нужно определить. Спроектируем точки O_1, O_2, O_3 и O на

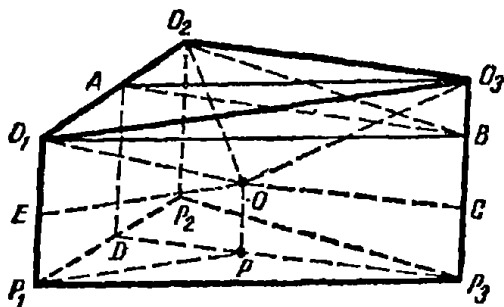


Рис. Р.3.45.

плоскость (рис. Р.3.45). Треугольник $P_1P_2P_3$ равнобедренный и точка P лежит на его медиане и высоте.

Обозначим радиус $OP = x$. После этого многие отрезки на рис. Р.3.45 можно будет выразить через R, r и x . Отложим на $O_3P_3 = R$ отрезок $BP_3 = r$.

Треугольники O_1O_2B и $P_1P_2P_3$ равны, как основания призмы. Перед нами задача — связать величины $r = O_1P_1 = O_2P_2, R = O_3P_3, x = OP$. Прямоугольные треугольники OO_1E и OO_3C позволяют вычислить отрезки P_1P и P_3P . Отрезок $DP_3 = AB$ можно найти из прямоугольного треугольника O_3AB (O_3A можно считать известной величиной). Полученные отрезки образуют прямоугольный треугольник P_1DP , для которого будут вычислены все стороны. Теорема Пифагора для этого треугольника и даст нужное нам соотношение между r, R и x .

Проведем теперь все вычисления.

Из треугольника O_3AO_2 находим

$$AO_3^2 = O_2O_3^2 + AO_2^2 = (R+r)^2 - r^2 = R^2 + 2Rr;$$

из треугольника O_3AB находим

$$AB^2 = AO_3^2 - O_3B^2 = R^2 + 2Rr - (R-r)^2 = 4Rr - r^2.$$

Следовательно, $DP_3^2 = 4Rr - r^2$.

Вычисляем

$$P_3P^2 = CO^2 = (R+x)^2 - (R-x)^2 = 4Rx$$

и

$$P_1P^2 = EO^2 = O_1O^2 - O_1E^2 = (r+x)^2 - (r-x)^2 = 4rx.$$

В треугольнике P_1DP известна гипотенуза P_1P . Катет $P_1D = r$, а катет

$$DP = DP_3 - P_3P = \sqrt{4Rr - r^2} - \sqrt{4Rx}.$$

По теореме Пифагора $P_1P^2 = P_1D^2 + DP^2$, т. е.

$$4rx = r^2 + 4Rr - r^2 - 4\sqrt{4R^2r - r^2R}\sqrt{x} + 4Rx,$$

или

$$(R-r)x - \sqrt{4R^2r - r^2R}\sqrt{x} + Rr = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{4R^2r - r^2R} \pm \sqrt{3Rr^2}}{2(R-r)}.$$

Хотя правая часть в обоих случаях положительна, нужно взять только знак минус, так как второе значение для $\sqrt{x}$ оказывается больше $\sqrt{r}$, что невозможно.

Ответ.
$$\frac{Rr(2R+r-\sqrt{(4R-r)3r})}{2(R-r)^2}.$$

3.46. Пусть O_1 и O_2 — центры двух равных шаров с радиусом R , а O_3 — центр третьего шара радиуса r (рис. Р.3.46). Треугольник O_1O_3F прямоугольный, т. е.

$$O_1O_3^2 = O_1F^2 + O_3F^2,$$

По условию $\frac{r}{R} = m$; разделим числитель и знаменатель правой части почленно на R^2 :

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4 \frac{r}{R} - 1}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2} = \frac{4m - 1}{(1 - m)^2}.$$

Число m всегда меньше единицы, так как по условию r меньше R . Кроме того, $4m - 1 \geq 0$, так как слева стоит квадрат. Но $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 0$, если $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \pi$, что невозможно. Поэтому $4m - 1 > 0$ и $m > \frac{1}{4}$.

Ответ. При $\frac{1}{4} < m < 1$ $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4m-1}}{1-m}$.

3.47. Обозначим центры шаров буквами O_1 , O_2 и O_3 , а их проекции на плоскость P через A , B и C . Треугольник ABC (рис. Р.3.47) равносторонний со стороной $2R$, а точка O — проекция вершины S конуса будет центром этого треугольника.

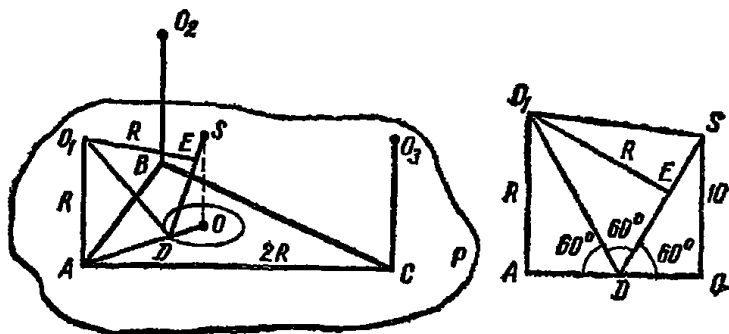


Рис. Р.3.47.

Образующую конуса, которой касается шар с центром в точке O_1 , обозначим через SD , а точку касания — буквой E . Отрезок O_1E перпендикулярен SD и равен R . Так как данный конус равносторонний, то угол между образующей и ее проекцией на основание конуса равен 60° . По условию $SO = 10$, следовательно, $DO = 10 \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

Отрезок AO находим из треугольника ABC :

$$AO = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, $AD = \frac{2R-10}{\sqrt{3}}$. Угол ADE равен 120° , а луч

O_1D делит его пополам. Из прямоугольного треугольника AO_1D

$$R = AD \operatorname{tg} 60^\circ, \quad \text{т. е. } R = \frac{2R-10}{\sqrt{3}} \sqrt{3},$$

откуда находим R .

Ответ. 10 см.

3.48. Пусть SO_1 и SO_2 — оси соседних конусов (рис. Р. 3.48). Тогда середина C отрезка O_1O_2 лежит на общей образующей этих конусов. Угол O_1SO_2 равен углу в осевом сечении конуса, обозначим его через x . Тогда углы O_1SA_1 и O_2SA_2 равны $\frac{x}{2}$.

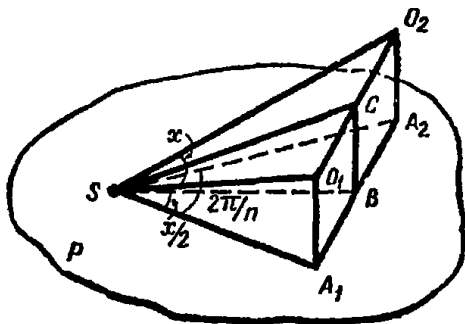


Рис. Р.3.48.

Проекция осей SO_1 и SO_2 на плоскость P лежат на образующих, по которым происходит касание конусов с плоскостью P . Так как конусов n , то угол $A_1SA_2 = \frac{2\pi}{n}$.

Отрезок SO_1 можно выразить через A_1B двумя способами.

С одной стороны, $SO_1 = \frac{O_1C}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{A_1B}{\sin \frac{x}{2}}$. С другой стороны,

$$SO_1 = \frac{SA_1}{\cos \frac{x}{2}}, \quad \text{а так как}$$

$$SA_1 = \frac{A_1B}{\sin \frac{\pi}{n}}, \quad \text{то } SO_1 = \frac{A_1B}{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{x}{2}}.$$

Приравнивая полученные для SO_1 выражения, получим

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sin \frac{\pi}{n}.$$

Ответ. $x = 2 \operatorname{arctg} \left(\sin \frac{\pi}{n} \right).$

3.49. Так как угол AOB (рис. Р.3.49) прямой, то точки A и O лежат на сфере, построенной на AB , как на диаметре. Следовательно, все внутренние точки отрезка AO лежат внутри

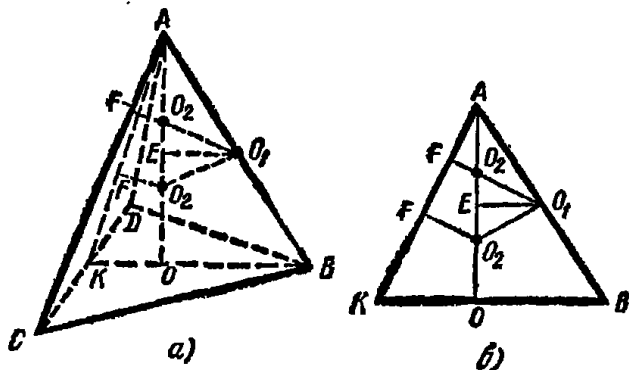


Рис. Р.3.49.

этой сферы. Поскольку центр сферы, радиус которой мы ищем, лежит на AO , то возможно лишь внутреннее касание сфер.

Центр O_2 вписанной сферы соединим с точкой F , в которой происходит касание сферы с одной из граней. Из подобия треугольников FO_2A и O_2KA имеем

$$\frac{AO_2}{a \sqrt{3} / 2} = \frac{r}{a \sqrt{3} / 6}, \text{ т. е. } AO_2 = 3r,$$

где r — искомый радиус.

Спроектируем точку O_1 на AO и рассмотрим прямоугольный треугольник O_1EO_2 . В нем O_1O_2 равно разности радиусов, т. е. $O_1O_2 = \frac{a}{2} - r$; EO_1 равно половине OB , т. е. $EO_1 = \frac{a \sqrt{3}}{6}$. Отрезок $O_2E = |AE - AO_2|$. Знак абсолютной величины означает, что точка O_2 может оказаться ниже точки E , либо выше ее (см. рис. Р.3.49, на котором изображены оба

случая). Так как $AE = \frac{1}{2}AO = \frac{a}{\sqrt{6}}$, а $AO_2 = 3r$, то $O_2E = \left| \frac{a}{\sqrt{6}} - 3r \right|$.

По теореме Пифагора $O_2O_1^2 = O_2E^2 + EO_1^2$, т. е.

$$\left(\frac{a}{2} - r \right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{6}} - 3r \right)^2 + \frac{a^2}{12}.$$

После простых преобразований получим уравнение

$$8r^2 + (1 - \sqrt{6})ar = 0,$$

откуда

$$r = \frac{\sqrt{6} - 1}{8} a.$$

Так как $AO_2 = 3r$, то $AO_2 = \frac{3(\sqrt{6} - 1)}{8} a$, в то время как $AE = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Сравнивая AO_2 и AE , мы видим, что AO_2 больше. Следовательно, точка O_2 на рис. Р.3.49 должна располагаться ниже точки E .

Ответ. $\frac{\sqrt{6} - 1}{8} a$.

3.50. Плоскость Π , проходящая через ось PP и центр O основания пирамиды, образует в сечении некоторый треугольник SMN (рис. Р.3.50). Повернем треугольник SAB около оси PP так, чтобы он лег в плоскость Π . Так как $AB = MN$, а высота SO меньше высоты SK , то треугольники расположатся так, как показано на рис. Р.3.50. Любое другое сечение SEF пирамиды попадет внутрь пятиугольника $SMABN$, а все сечения дважды покроют этот пятиугольник.

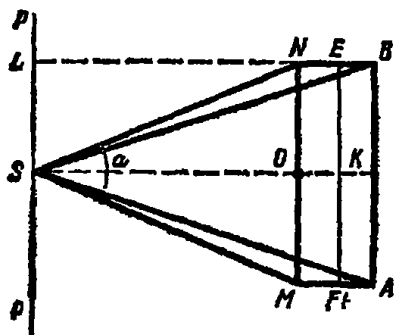


Рис. Р.3.50.

Остается определить объем тела, полученного от вращения пятиугольника $SMABN$ вокруг оси PP . Половину искомого объема можно получить в виде разности объемов цилиндра, полученного от враще-

ния прямоугольника $SKBL$, и конуса, полученного от вращения треугольника SNL :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V_{SMABN} &= V_{SKBL} - V_{SNL} = \\ &= \pi SK^2 \cdot BK - \frac{1}{3} \pi LN^2 \cdot BK = \pi \cdot BK \left(SK^2 - \frac{1}{3} LN^2 \right). \end{aligned}$$

Из соответствующих треугольников находим

$$SK = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}; \quad LN^2 = SO^2 = SN^2 - NO^2 = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V_{SMABN} &= \pi a \left(\frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{12} \right) = \\ &= \frac{\pi a^3}{12} \left(2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi a^3}{12} \left(2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right).$$

Г л а в а 4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПРОЕКЦИОННОМ ЧЕРТЕЖЕ

4.1. Проведем AE до пересечения с DC в точке F (рис. Р.4.1, а). Точка F лежит в плоскости грани DD_1C_1C , в которой лежит еще одна точка O , принадлежащая сечению. Проведем FO до пересечения с D_1D в точке N . Таким образом, сечение,

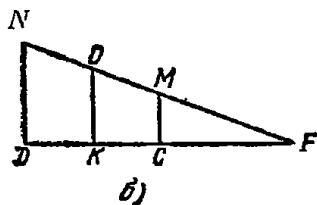
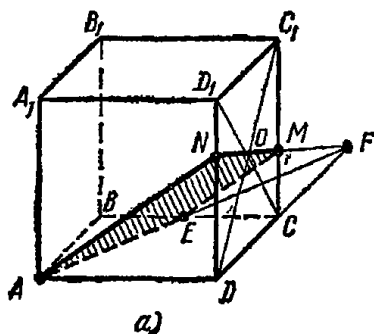


Рис. Р.4.1.

о котором идет речь в условии, построено; это $ANME$ на рис. Р.4.1, а).

Обозначим ребро куба через a и вычислим объем фигуры, лежащей под сечением, как разность объемов двух пирамид: $NAFD$ и $MEFC$.

Отрезок EC — средняя линия в треугольнике AFD , следовательно, $CF = CD = a$.

Вычертим отдельно треугольник NFD и проведем $OK \parallel ND$ (рис. Р.4.1, б). Так как O — центр грани куба, то $OK = \frac{a}{2}$, $DK = KC = \frac{a}{2}$. Из подобия образовавшихся треугольников находим

$$MC = \frac{a}{3}, \quad ND = 2MC = \frac{2a}{3}.$$

Так как треугольники EFC и EAB равны (рис. Р.4.1, а), то площадь треугольника AFD равна a^2 , а площадь треугольника EFC равна $\frac{a^2}{4}$. Теперь можно вычислить объем фигуры, лежащей под сечением $ANME$:

$$\frac{1}{3} ND \cdot a^2 - \frac{1}{3} MC \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{1}{3} \frac{2a}{3} a^2 - \frac{1}{3} \frac{a}{3} \frac{a^2}{4} = \frac{7a^3}{36},$$

и найти искомое отношение объемов.

Ответ. 29:7.

4.2. Проведем прямую FG , которая пересечет A_1B_1 и A_1D_1 в точках M и L соответственно (рис. Р.4.2). Соединив точки M и A и точки L и A , получим еще две точки E и K , принадлежащие сечению.

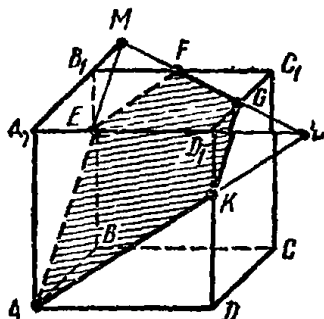


Рис. Р.4.2.

Площадь сечения $AEFGK$ вычислим как разность площади треугольника AML и удвоенной площади треугольника KGL .

Треугольники FB_1M , FC_1G и GD_1L равны. Следовательно, $D_1L = B_1F = \frac{1}{2}$, $MF = FG = GL$. С помощью треугольников MA_1L и AA_1L можно найти стороны треугольника AML :

$$ML = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad AM = AL = \sqrt{A_1A^2 + A_1L^2} = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

его высоту

$$\sqrt{AL^2 - \left(\frac{ML}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{8}}$$

и его площадь $\frac{3\sqrt{17}}{8}$.

Треугольники AML и KGL подобны, так как GK и AM параллельны (они получены в результате пересечения двух параллельных граней куба плоскостью сечения), с коэффициентом подобия $1/3$ (мы доказали раньше, что $3GL = ML$). Следовательно, площадь треугольника KGL равна $1/9$ площади треугольника AML , а площадь сечения $AEFGK$ равна $7/9$ площади AML .

Ответ. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$.

4.3. Пусть K — точка пересечения AO_1 и C_1C (рис. Р.4.3). Соединим K с центром Q боковой грани BB_1C_1C и получим сечение куба. Так как Q — центр симметрии квадрата B_1C_1CB , то $B_1E = FC$. Проведем O_1C_1 и AC . Отрезок O_1C_1 — средняя линия в треугольнике AKC , и, следовательно, $KC_1 = C_1C$.

Треугольники KFC и KEC_1 подобны с коэффициентом подобия 2. Поэтому $FC = 2EC_1$. Так как $FC = B_1E$, то отношение отрезков B_1E к EC_1 равно 2.

Ответ. 2.

4.4. Пусть высота данной пирамиды h , сторона основания a . Найдем объем фигуры, лежащей под сечением $BEFG$ (рис. Р.4.4, а), как разность объемов пирамид $EBCM$ и $FGDM$.

Объем первой пирамиды равен

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{3a^2}{2} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} ha^2 \right) = \frac{3}{4} v,$$

где v — объем данной пирамиды.

9*

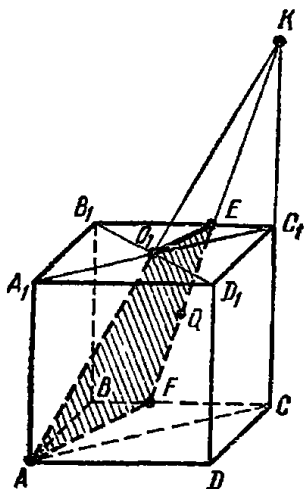


Рис. Р.4.3.

Чтобы найти высоту пирамиды $FGDM$, сделаем чертеж плоскости, в которой лежит грань SDC (рис. Р.4.4, б). Проведем EL параллельно SD . Так как E — середина SC ,

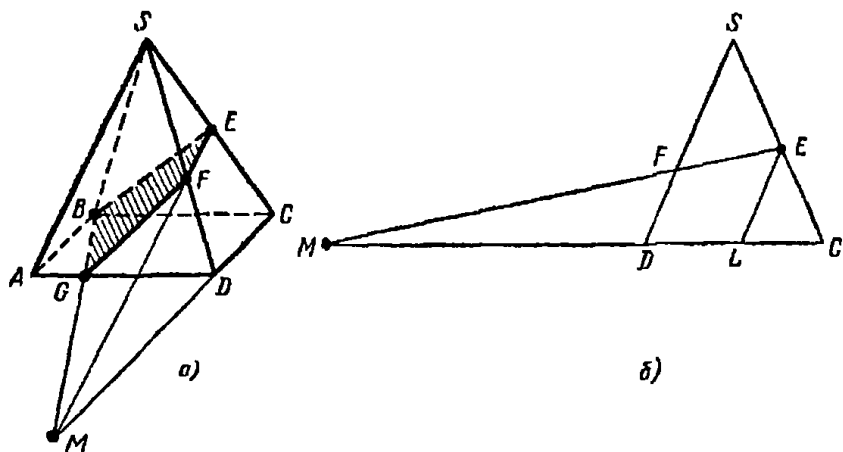


Рис. Р.4.4.

то $DL = \frac{1}{2} DC = \frac{a}{2}$. Из подобия треугольников MEL и MFD найдем

$$\frac{FD}{EL} = \frac{MD}{ML} = \frac{2a}{2,5a} = \frac{4}{5}.$$

Нетрудно проверить (сделайте это самостоятельно), что высота пирамиды $FGDM$ равна $\frac{4}{5}$ высоты $EBCM$, т. е. $\frac{4}{10} h$.

Из подобия треугольников MGD и MBC (см. рис. Р.4.4, а) найдем $GD = \frac{2a}{3}$. Это означает, что объем пирамиды $FGDM$ равен

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4h}{10} \cdot \frac{2a^2}{3} = \frac{4}{15} \left(\frac{1}{3} ha^2 \right) = \frac{4}{15} v.$$

Таким образом, объем фигуры, лежащей под сечением, равен

$$\frac{3}{4} v - \frac{4}{15} v = \frac{29}{60} v.$$

Ответ. $\frac{29}{31}$.

4.5. Сечение $AMND$ и диагональная плоскость ASC разбивают данную пирамиду на четыре части. Так как высота пирамиды $NACD$ (рис. Р.4.5) вдвое меньше высоты данной пирамиды, а площадь основания вдвое меньше площади основания $ABCD$, то ее объем равен $\frac{v}{4}$, где v — объем данной пирамиды.

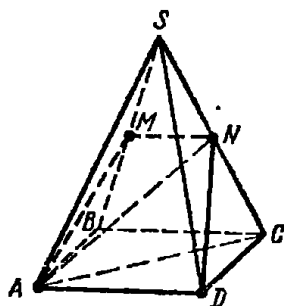


Рис. Р.4.5.

Рассмотрим пирамиды $ASBC$ и $ASMN$ с общей вершиной A . Их высоты равны, а площадь основания первой в четыре раза больше. Следовательно, их объемы относятся, как 4:1. Таким образом, на долю пирамиды $ABMNC$ приходится $\frac{3}{8}v$.

Теперь можно найти, какую часть объема пирамиды составляет фигура, расположенная под сечением:

$$\frac{1}{4}v + \frac{3}{8}v = \frac{5}{8}v.$$

Ответ. 5:3.

4.6. Соединим точки P , Q и R с вершиной A (рис. Р.4.6), после чего соединим их между собой. Продолжим A_1B_1 до пересечения с QP в точке E и A_1D_1 до пересечения с QR в точке F . Обе точки E и F лежат в плоскости верхнего основания, а EF — след сечения в этой плоскости, который пересекает верхнюю грань куба по отрезку MK .

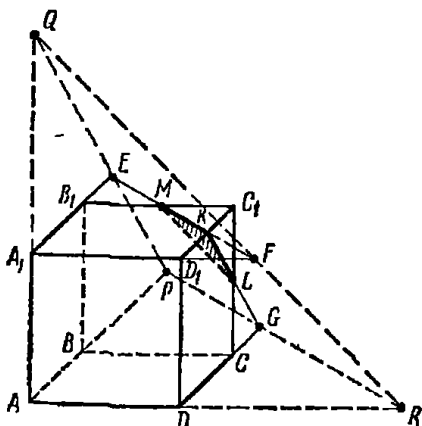


Рис. Р.4.6.

Продолжим DC до пересечения с PR в точке G и соединим K с G . На ребре CC_1 получим точку L , принадлежащую сечению.

Из подобия треугольников QA_1E и QAP следует, что $A_1E = A_1Q = \frac{3}{2}a$, где a — ребро куба.

Через точки K и D проведем прямую, которая пересечет AB в точке M . Докажем, что EM — высота в треугольнике ABE .

Поскольку $KC = \frac{1}{2}FC$, а $DO = \frac{1}{2}OB$ (ABC — правильный треугольник) и $FC = OB$ (треугольники C_1FC и B_1OB равны), то $KC = DO$. Покажем, что $KC \parallel DO$. В самом деле, так как $OB \perp AC$, то и $BB_1 \perp AC$. Следовательно, $CC_1 \perp AC$, а значит, и $KC \perp AC$. Итак, KC и DO параллельны, а фигура $KCOD$ — параллелограмм. Теперь мы можем воспользоваться тем, что отрезок KM параллелен CO , а потому перпендикулярен к AB . Отсюда следует, что EM — высота в треугольнике ABE .

Остаются простые вычисления:

$$KE = \frac{1}{2} OB_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - OB^2} = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - \frac{b^2}{3}},$$

$$KD = CO = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

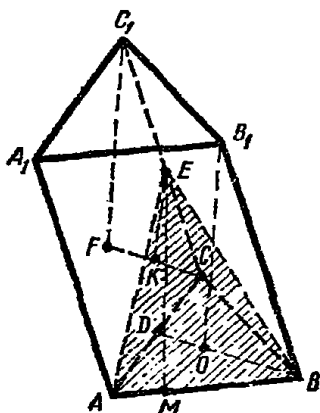


Рис. Р.4.8.

Площадь треугольника ADB можно найти двумя способами:

$$\frac{1}{2} DM \cdot AB = \frac{1}{2} DB \cdot AD, \text{ т. е. } b \cdot DM = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ откуда } MD = \frac{b\sqrt{3}}{4}.$$

Теперь найдем EM :

$$EM = \sqrt{KE^2 + KM^2} = \sqrt{KE^2 + (KD + DM)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{4l^2 + 15b^2}.$$

Ответ. $\frac{b}{8} \sqrt{4l^2 + 15b^2}.$

4.9. В диагональной плоскости BB_1D_1D (рис. Р.4.9) проведем через точку F отрезок EG , параллельный BD . В другой диагональной плоскости AA_1C_1C проведем через точку F отрезок $KL \parallel AC_1$. В плоскости верхнего основания построим отрезок $MN \parallel B_1D_1$ и проходящий через точку L . Точки K, G ,

N, M, E являются вершинами сечения, площадь которого мы должны вычислить. Это сечение — пятиугольник, разбивающийся на треугольник EKG и трапецию $EGNM$. Если KR —

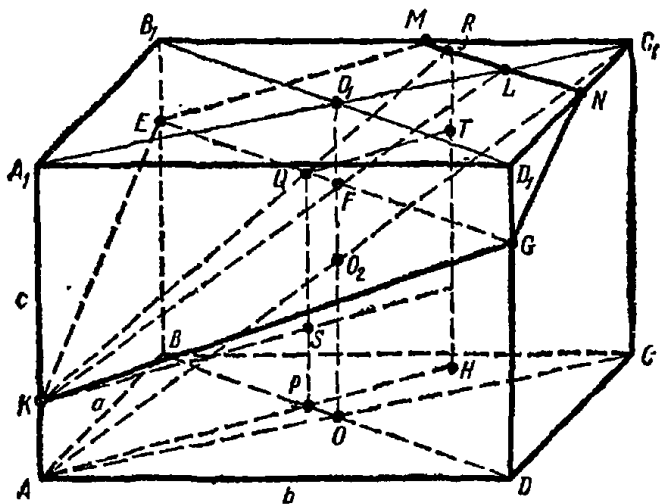


Рис. Р.4.9.

высота треугольника, а Q — точка пересечения KR и EG , то площадь пятиугольника равна

$$\frac{1}{2} KQ \cdot EG + \frac{1}{2} (EG + MN) QR.$$

Так как $KL \parallel AC_1$, то $LC_1 = \frac{1}{4} A_1C_1$ и $MN = \frac{1}{2} B_1D_1 = \frac{1}{2} EG$.

В свою очередь $EG = \sqrt{a^2 + b^2}$. Поэтому $MN = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.

Чтобы вычислить отрезки KQ и QR , спроектируем KR на плоскость основания. Точка Q спроектируется в P , а точка R — в H . Обозначим через S и T проекции точек K и Q на отрезки QP и RH соответственно.

По теореме о трех перпендикулярах $AP \perp BD$. Сравнивая площадь треугольника ADB , получим

$$AP \cdot BD = ab,$$

а так как $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, то

$$AP = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Из подобия треугольников легко получим

$$AK = \frac{1}{4}c, \quad RT = \frac{1}{4}c, \quad QS = \frac{1}{2}c.$$

Поскольку $MN = \frac{1}{2}B_1D_1$, то $QR = \frac{1}{2}KQ$. Из треугольника KQS находим

$$\begin{aligned} KQ &= \sqrt{KS^2 + QS^2} = \sqrt{AP^2 + QS^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4a^2b^2 + c^2a^2 + c^2b^2}{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем вычислить площадь фигуры:

$$S = \frac{1}{2}KQ \cdot EG + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}EG \cdot \frac{1}{2}KQ = \frac{7}{8}EG \cdot KQ.$$

Ответ. $\frac{7}{16} \sqrt{4a^2b^2 + c^2a^2 + c^2b^2}.$

4.10. Чтобы построить тень куба, достаточно построить тень, отбрасываемую верхним основанием. По условию источник света расположен на высоте $2h$. Из подобия треугольников, получающихся при построении тени, следует, что

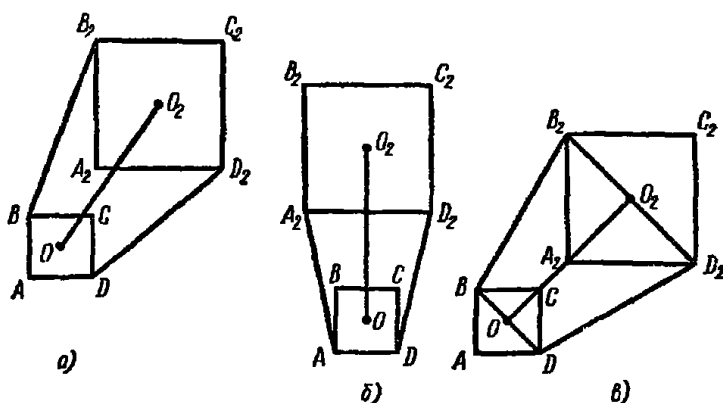


Рис. Р.4.10.

тенью, отбрасываемой верхним основанием куба, будет квадрат $A_2B_2C_2D_2$ (рис. Р.4.10; см. также рис. I.4.10). Каждая сторона этого квадрата параллельна соответствующей стороне основания куба и равна $2h$. Отрезок OO_2 , соединяющий центры квадратов $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$, при вращении источника света не изменяется и равен R . Чтобы получить

тень куба, нужно на рис. Р.4.10, *а* построить «внешние» отрезки, соединяющие соответственные вершины квадрата $A_2B_2C_2D_2$ с вершинами нижнего основания куба.

Задача становится плоской. Нужно выяснить, когда площадь полученного многоугольника будет максимальной, если точка O_2 вращается вокруг точки O , а стороны квадрата $A_2B_2C_2D_2$ остаются параллельными сторонам квадрата $ABCD$.

В двух случаях (рис. Р.4.10, *б* и *в*) площадь будет достигать максимума по сравнению с близкими положениями точки O_2 . В самом деле, если точка O_2 немного сместится из положения, изображенного на рис. Р.4.10, *б*, вправо или влево по окружности радиуса R , то площадь тени уменьшится, так как уменьшится площадь трапеции ADD_2A_2 : у этой трапеции основания AD и A_2D_2 не изменятся, а высота станет меньше. То же самое произойдет и в случае, изображенном на рис. Р.10.4, *в*. Здесь уменьшится площадь трапеции BDD_2B_2 .

Остается сравнить площади этих двух фигур.

Площадь первой равна

$$4h^2 + \frac{3h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right),$$

площадь второй

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} Rh + \frac{5}{2} h^2.$$

При $R > 2h$ вторая площадь больше, что и доказывает сформулированное в условии утверждение.

Г л а в а 5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА

5.1. Из любой точки M (рис. Р.5.1) отрезок ON виден под прямым углом. Следовательно, искомое геометрическое место точек — окружность, построенная на отрезке ON , как на диаметре.

5.2. Пусть точка M принадлежит искомому геометрическому месту точек. По теореме косинусов для треугольника AMB (рис. Р.5.2) имеем

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cos \alpha.$$

Так как

$$AM \cdot BM \cos \alpha = \frac{3}{4} AB^2,$$

то

$$AM^2 + BM^2 = \frac{5}{2} AB^2.$$

Положение точки M определяется медианой MC , которая равна

$$4MC^2 = 2AM^2 + 2BM^2 - AB^2.$$

Воспользуемся предыдущим соотношением и заменим $2(AM^2 + BM^2)$ на $5AB^2$:

$$4MC^2 = 5AB^2 - AB^2, \quad \text{т. е.} \quad MC = AB.$$

Итак, искомое геометрическое место точек — окружность радиуса AB с центром в середине AB .

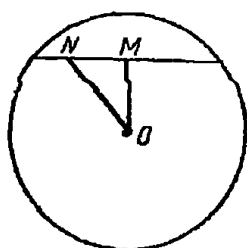


Рис. Р.5.1.

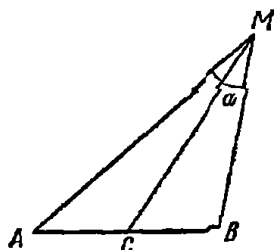


Рис. Р.5.2.

5.3. Докажем вначале, что если точка M лежит на рассматриваемой окружности, то выполняется сформулированное в условии задачи соотношение. Обозначим центр окружности буквой O и выберем на окружности произвольную точку M , отличную от A и C (рис. Р.5.3).

Применим к стороне MB треугольника AMB теорему косинусов:

$$\begin{aligned} MB^2 &= \\ &= AM^2 + AB^2 - 2AM \cdot AB \cos A. \end{aligned}$$

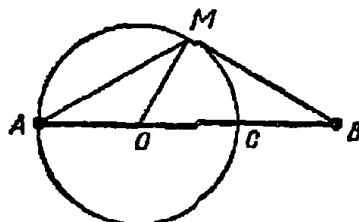


Рис. Р.5.3.

Из треугольника AMO находим $AM = 2AO \cos A$, откуда $\cos A = \frac{AM}{2AO}$. По условию $AO = \frac{AB}{3}$. Подставляя $\cos A = \frac{3AM}{2AB}$

в выражение для MB^2 , получим

$$MB^2 = AM^2 + AB^2 - 3AM^2,$$

т. е.

$$2AM^2 + MB^2 = AB^2,$$

что и требовалось проверить.

Простой проверкой легко убедиться, что это соотношение справедливо, если M совпадает с A и если M совпадает с C . В первом случае $AM = 0$, а $MB = AB$ и равенство становится очевидным $AB^2 = AB^2$. Во втором случае $AM = AC = \frac{2}{3} AB$, $MB = CB = \frac{1}{3} AB$ и

$$2 \left(\frac{2}{3} AB \right)^2 + \left(\frac{1}{3} AB \right)^2 = AB^2.$$

Перейдем к доказательству обратного утверждения.

Докажем, что если в треугольнике AMB

$$3AO = AB \quad \text{и} \quad 2AM^2 + MB^2 = AB^2,$$

то $AO = MO$, т. е. точка M лежит на окружности радиуса AO . Начнем со случая, когда M не лежит на AB . Предыдущие рассуждения подсказывают нам, что полезно воспользоваться не только данным соотношением, но и теоремой косинусов для треугольника AMB :

$$MB^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM \cdot AB \cos A.$$

Так как мы не знаем, чему равен $\cos A$, то постараемся его исключить. Запишем теорему косинусов для стороны MO треугольника AMO (учтем при этом, что $3AO = AB$):

$$MO^2 = AM^2 + \frac{1}{9} AB^2 - \frac{2}{3} AM \cdot AB \cos A.$$

Умножив последнее равенство на -3 и сложив с выражением для MB^2 , получим

$$MB^2 - 3MO^2 = -2AM^2 + \frac{2}{3} AB^2.$$

Заменяя $MB^2 + 2AM^2$ на AB^2 , придем к равенству

$$AB^2 = 3MO^2 + \frac{3}{2} AB^2,$$

т. е.

$$AB^2 = 9MO^2,$$

откуда $AB = 3MO$ и $MO = AO$, что и требовалось показать.

Если теперь точка M лежит на прямой AB , то она может располагаться либо на отрезке AB (включая его концы), либо вне этого отрезка.

Пусть точка M расположена вне отрезка AB . Тогда или $AM + AB = MB$, или $MB + AB = AM$. В первом случае получаем $AB = MB - AM$, а после возведения в квадрат: $AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB$. Заменяя AB^2 на $2AM^2 + MB^2$, придем к равенству $AM = -2MB$, которое абсурдно. Аналогично рассматривается второй случай.

Пусть теперь точка M расположена на отрезке AB . Тогда $AM + MB = AB$, что после возведения в квадрат и замены AB^2 на $2AM^2 + MB^2$ приводит к равенству

$$AM^2 = 2MB \cdot AM.$$

Из этого равенства следует, что либо $AM = 0$ (точки A и M совпадают), либо $AM = 2MB$ (точка M совпадает с точкой C).

Тем самым доказательство полностью завершено.

5.4. Прямые, на которых лежат стороны AB и BC треугольника ABC , разбивают плоскость на четыре угла

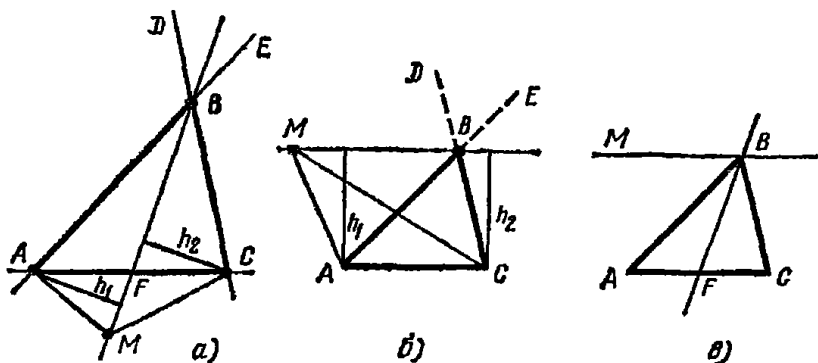


Рис. Р.5.4.

(рис. Р.5.4, а). Пусть точка M принадлежит нашему геометрическому месту точек и лежит внутри одного из углов ABC или DBE . Проведем прямую BM и обозначим через F точку ее пересечения с AC . Так как точка M принадлежит рассматриваемому геометрическому месту точек, то $S_{AMB} = S_{CMB}$.

Поскольку MB — общая сторона треугольников AMB и CMB , то $h_1 = h_2$ (рис. Р.5.4, а). Следовательно, отрезок BF делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника AFB и CFB (BF — общая сторона, $h_1 = h_2$). Если основаниями этих треугольников считать соответственно AF и FC , то мы приходим к выводу, что $AF = FC$, поскольку треугольники AFB и CFB имеют общую высоту. Итак, если точка M лежит внутри одного из углов ABC или DBE , то она лежит на прямой BF , проходящей через середину AC .

Пусть точка M лежит внутри одного из двух оставшихся углов ABD или CBE (рис. Р.5.4, б). Треугольники AMB и CMB снова имеют общую сторону MB , и поскольку они равновелики, то $h_1 = h_2$. Следовательно, прямая MB параллельна AC .

Мы рассмотрели всевозможные случаи расположения точки M на плоскости. Таким образом, доказано, что если точка M принадлежит искомому геометрическому месту точек, то она лежит либо на прямой BF , проходящей через середину AC , либо на прямой MB , параллельной AC .

Легко проверить, что каждая точка этих двух прямых обладает необходимым свойством. Следовательно, прямые BF и MB образуют искомое геометрическое место точек (рис. Р.5.4, в).

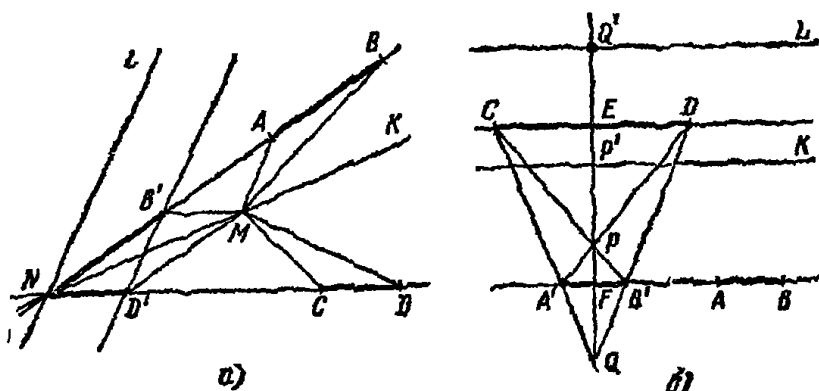


Рис. Р.5.5.

5.5. Рассмотрим вначале случай, когда прямые AB и CD , на которых лежат данные отрезки, пересекаются в некоторой точке N (рис. Р.5.5, а). Пусть точка M принадлежит

искомому геометрическому месту. Площади треугольников ABM и CDM не изменятся, если каждый из отрезков AB и CD двигать по несущей его прямой. Переместим отрезки так, чтобы они имели своим общим концом точку N . Отрезок AB перейдет в NB' , а отрезок CD — в ND' . Поскольку пары треугольников ABM , $NB'M$ и CDM , $ND'M$ равновелики, то искомое геометрическое место точек можно характеризовать тем свойством, что площади треугольников $NB'M$ и $ND'M$ равны.

Итак, задача свелась к предыдущей (см. задачу 5.4): для треугольника $B'ND'$ найти геометрическое место точек M таких, что площади треугольников $NB'M$ и $ND'M$ равны. Мы уже доказали, что это — две прямые NK и NL , первая из которых проходит через середину $B'D'$, а вторая параллельна $B'D'$.

Рассмотрим теперь случай, когда прямые AB и CD параллельны. Сместим отрезок AB по несущей его прямой так, чтобы его центр совпал с центром CD (рис. Р.5.5, б). Если точка M (на рисунке она не изображена) принадлежит искомому геометрическому месту точек, то отношение ее расстояний до прямых AB и CD есть отношение высот в треугольниках ABM и CDM . Площади этих треугольников будут равны тогда и только тогда, когда отношение расстояний от точки M до AB и CD будет равно отношению отрезков CD и AB . Таким образом, искомое геометрическое место есть две параллельные прямые, расстояния которых до CD и AB относятся, как $AB:CD$.

Чтобы построить это геометрическое место точек, сместим отрезок AB по несущей его прямой так, чтобы его центр оказался на общем перпендикуляре к AB и CD с центром E отрезка CD (рис. Р.5.5, б). Прямые DA' и CB' пересекутся в точке P , которая делит EF в отношении $PF:PE = AB:CD$, а прямые DB' и CA' пересекутся в точке Q , для которой $QF:QE = AB:CD$. Остается на прямой EF (рис. Р.5.5, б) построить отрезки $EP' = FP$ и $EQ' = FQ$. Прямые $P'K$ и $Q'L$, проведенные через P' и Q' параллельно AB и CD , образуют искомое геометрическое место точек.

5.6. Для данного куба с ребром a найдем сначала геометрическое место середин отрезков длины l , один из концов которых лежит на диагональной прямой верхнего основания, а другой — на не параллельной ей диагональной прямой

нижнего основания. Как мы увидим, замена диагоналей на диагональные прямые позволяет упростить задачу.

Если MN — отрезок длины l , о котором идет речь в условии задачи, а расстояние между плоскостями верхнего и нижнего оснований равно a , то проекция MK отрезка MN на плоскость нижнего основания равна $\sqrt{l^2 - a^2}$ (рис. Р.5.6, а).

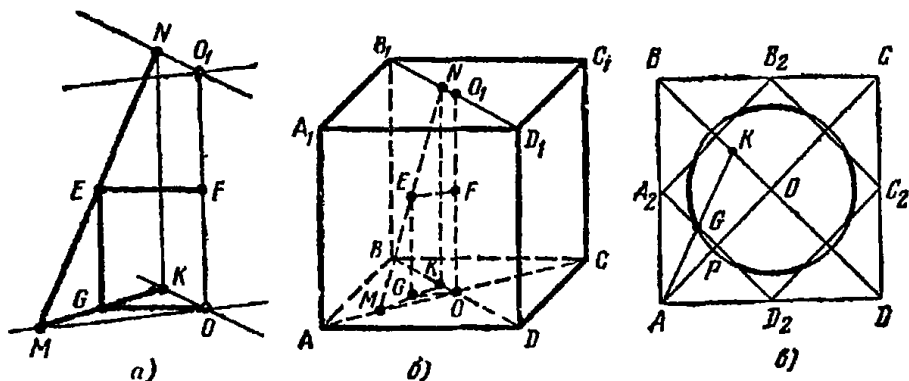


Рис. Р.5.6.

Проекция G середины E отрезка MN делит MK пополам, поэтому $MG = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - a^2}$. Треугольник MKO прямоугольный, а GO — его медиана. Следовательно, $GO = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - a^2}$. Тем самым мы установили, что для фиксированного l точка G всегда отстоит от точки O на одинаковом расстоянии, равном $\frac{1}{2} \sqrt{l^2 - a^2}$, т. е. лежит на окружности радиуса $\frac{1}{2} \sqrt{l^2 - a^2}$ с центром в точке O .

Итак, если точка E принадлежит искомому геометрическому месту, то она лежит в плоскости, параллельной основаниям куба и проходящей через середину F отрезка OO_1 , и принадлежит окружности радиуса $\frac{1}{2} \sqrt{l^2 - a^2}$ с центром в точке F .

Для той измененной задачи, которую мы рассматриваем, верно и обратное утверждение: любую точку E , принадлежащую описанной выше окружности, можно спроектировать в точку G плоскости нижнего основания и радиусом GO

сделать из точки G засечки M и K на диагональных прямых нижнего основания. Построив перпендикуляр NK , мы сможем найти и отрезок MN длины l , серединой которого является точка E .

Теперь остается учесть тот факт, что точка E и отрезок MN не должны покидать пределы куба.

Для этого нужно уловить тот момент, после которого один конец отрезка MN , например M , покинет куб. Ясно, что это произойдет, когда точка M совместится с одной из вершин квадрата $ABCD$. Пусть точка M совпала с вершиной A (рис. Р.5.6, б). В зависимости от длины l отрезка MN проекция K точки N расположится на отрезке OB . При изменении длины отрезка MN точка K пробегает весь отрезок BO , а середина G отрезка MK пробегает в это время отрезок A_2P , являющийся средней линией треугольника ABO .

Теперь ясно, что проекция точки E на плоскость нижнего основания куба не может выйти из квадрата $A_2B_2C_2D_2$ (рис. Р.5.6, в).

Итак, искомое геометрическое место точек расположено в горизонтальном сечении куба, проходящем через его центр. Это — часть окружности с центром в центре куба, не выходящая за пределы квадрата, проектирующегося в $A_2B_2C_2D_2$.

Г л а в а 6

СВОЙСТВА ЧИСЕЛ. ДЕЛИМОСТЬ

6.1. Имеем $p^3 - 1 = (p - 1)(p + 1)$, а $p - 1$, p , $p + 1$ — три последовательных числа, из которых $p > 3$ простое. Следовательно, $p - 1$ и $p + 1$ — два последовательных четных числа, т. е. одно из них обязательно делится на четыре, а произведение делится на восемь. Известно, что из трех последовательных целых чисел одно делится на три. Но p — простое, следовательно, на три делится либо $p - 1$, либо $p + 1$. Мы доказали, что $p^2 - 1$ делится на $8 \cdot 3 = 24$.

6.2. Первый способ. Предположим, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при $n = k$. (Если $n = 1$, то это очевидно.) Тогда при $n = k + 1$ получим

$$\begin{aligned}(k + 1)^3 + 2(k + 1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + (2k + 2) = \\ &= (k^3 + 2k) + 3k^2 + 3k + 3.\end{aligned}$$

Так как $k^3 + 2k$ делится на 3, то и $(k+1)^3 + 2(k+1)$ тоже делится на 3. В силу принципа индукции утверждение доказано.

Второй способ. Так как $n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$, то при $n = 3k$ делимость на 3 очевидна. Если же $n = 3k \pm 1$, то $n^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3$ и также делится на 3.

6.3. Разложим данное число на множители двумя способами:

$$\begin{aligned} 3^{105} + 4^{105} &= (3^5)^{21} + (4^5)^{21} = 243^{21} + 1024^{21} = \\ &= (243 + 1024)(243^{20} - \dots + 1024^{20}) = \\ &= 181 \cdot 7(243^{20} - \dots + 1024^{20}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{105} + 4^{105} &= (3^7)^{15} + (4^7)^{15} = 2187^{15} + 16384^{15} = \\ &= (2187 + 16384)(2187^{14} - \dots + 16384^{14}) = \\ &= 18571(2187^{14} - \dots + 16384^{14}) = \\ &= 49 \cdot 379(2187^{14} - \dots + 16384^{14}). \end{aligned}$$

Таким образом, данное число делится на 49 и на 181.

6.4. Множитель 2 содержится один раз во всех четных числах, два раза во всех числах, делящихся на 4, три раза в числах, делящихся на 8, и т. д. Поэтому четные числа мы должны сосчитать отдельно, прибавить к ним количество чисел, делящихся на 4, к ним прибавить количество чисел, делящихся на 8, и т. д. В результате получим

$$250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 494.$$

В этой сумме каждое следующее слагаемое получено из предыдущего как целая часть от деления его на два.

Ответ. 494.

6.5. Если умножить данное число на 10, то его свойство быть кратным 81 не изменится. Получим число

$$\underbrace{10 \ 10 \ 10 \ \dots \ 10}_{81 \text{ раз}}$$

Сумма цифр этого числа делится на 9. Разобьем его на 9 одинаковых секций -

$$\underbrace{10 \ \dots \ 10}_{9 \text{ раз}} \ \dots \ \underbrace{10 \ \dots \ 10}_{9 \text{ раз}}$$

и будем делить на 9. Так как сумма цифр в каждой секции равна 9, то каждая секция делится на 9. Обозначим частное от деления одной секции на 9 через A . В результате деления на 9 всего числа получим

$$\begin{aligned} A \cdot 10^{144} + A \cdot 10^{126} + A \cdot 10^{108} + \dots + A \cdot 10^{18} + A = \\ = A \underbrace{(10^{144} + 10^{126} + \dots + 10^{18} + 1)}_{9 \text{ слагаемых}}. \end{aligned}$$

Сумма цифр числа, стоящего в скобках, равна 9. Следовательно, полученное частное делится на 9, а данное число — на 81.

6.6. Дополним $n^4 + 4$ до полного квадрата:

$$\begin{aligned} n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 &= (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2). \end{aligned}$$

Число $n^4 + 4$ может быть простым только в том случае, если либо $n^2 - 2n + 2 = 1$, либо $n^2 + 2n + 2 = 1$. Решая эти уравнения, получим $n = 1$, $n = -1$. При $n = \pm 1$ данное выражение равно 5, т. е. является простым числом.

Ответ. $n = \pm 1$.

6.7. Подставим $n = 2k$, получим

$$\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24} = \frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Остается доказать, что числитель всегда делится на 6.

Так как одно из двух последовательных целых чисел k и $k+1$ четное, то делимость на 2 очевидна. Если ни k , ни $k+1$ не делятся на 3, то $k = 3m + 1$, а $k+1 = 3m + 2$. Тогда $2k+1 = 2(3m+1)+1 = 6m+3$, т. е. $2k+1$ делится на 3. Тем самым доказательство закончено.

6.8. Первый способ. Если дробь сократима, то

$$5x + 7 = qr, \quad 2x + 3 = pr.$$

Исключая из этих равенств x , получим

$$1 = (3p - 2q)r,$$

или

$$\frac{1}{r} = 3p - 2q.$$

Если дробь $\frac{2x+3}{5x+7}$ сократима на целое число $r \neq \pm 1$, то в последнем равенстве справа стоит целое число, а слева — не целое. Таким образом, это равенство противоречиво, и данная дробь не сократима.

Второй способ. Если данная дробь сократима, то сократима и дробь

$$\frac{5x+7}{2x+3} = 2 + \frac{x+1}{2x+3}.$$

Таким образом, должна быть сократимой дробь, стоящая в правой части и, следовательно, дробь

$$\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}.$$

Дробь $\frac{1}{x+1}$ не сократима ни при каких x , так как в числителе стоит единица.

Итак, данная дробь не сократима ни при каких x .

6.9. Число $\overline{34x5y}$ должно делиться на 4 и 9. Это число делится на 4, если две его последние цифры образуют число, делящееся на 4, т. е. либо $y=2$, либо $y=6$.

Когда $y=2$, то x определяется однозначно: так как сумма цифр должна делиться на девять, то $x=4$.

Когда $y=6$, то в качестве x можно взять либо 0, либо 9.

Итак, получаем три числа.

Ответ. 34 452; 34 056; 34 956.

6.10. Условие можно записать так:

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 1 = 3(2 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c),$$

где a , b и c — цифры.

Так как число $3c$ должно оканчиваться единицей, то $c=7$. После этого равенство можно переписать в виде

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1 = 6 \cdot 10^3 + 3a \cdot 10^2 + (3b + 2)10 + 1.$$

Поскольку b — цифра, $0 \leq b \leq 9$, то

$$2 \leq 3b + 2 \leq 29.$$

Кроме того, $3b+2$ должно оканчиваться на 7, т. е. $3b+2$ равно одному из чисел 7, 17, 27. В результате найдем три

значения b , из которых только $b=5$ будет целым. После этого равенство переписывается так:

$$a \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1 = 6 \cdot 10^3 + (3a + 1) 10^2 + 7 \cdot 10 + 1.$$

Число $3a + 1$ заключено между 1 и 28 и должно оканчиваться на 5, т. е. нужно рассмотреть три возможности: $3a + 1 = 5; 15; 25$. Только одно из этих уравнений, $3a + 1 = 25$, имеет целое решение $a = 8$.

Убедившись, что при $c = 7$, $b = 5$, $a = 8$ составленное равенство выполняется, можем считать решение задачи законченным.

Ответ. 857.

Г л а в а 7

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$\begin{aligned} 7.1. A &= \frac{n^3 + 1 - 3(n+1) + (n^2 - 1) \sqrt{n^2 - 4}}{n^3 - 1 - 3(n-1) + (n^2 - 1) \sqrt{n^2 - 4}} = \\ &= \frac{(n+1)(n^2 - n - 2) + (n^2 - 1) \sqrt{n^2 - 4}}{(n-1)(n^2 + n - 2) + (n^2 - 1) \sqrt{n^2 - 4}} = \\ &= \frac{(n+1)^2 (n-2) + (n^2 - 1) \sqrt{n^2 - 4}}{(n-1)^2 (n+2) + (n^2 - 1) \sqrt{n^2 - 4}} = \frac{(n+1) \sqrt{n-2}}{(n-1) \sqrt{n+2}}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{(n+1) \sqrt{n-2}}{(n-1) \sqrt{n+2}}.$

7.2. Перепишем данное выражение так:

$$A = \left(\frac{1-x}{x^2(1+x-x^2)} - \frac{x^3-1+x-1}{x(x^4-x^2-2x-1)} \right) : \left(\frac{1+x}{x^3(1+x+x^2)} - \frac{1-x+x^2}{x^3} \right).$$

Числитель второй дроби теперь легко разложить на множители. Со знаменателем дело обстоит несколько труднее. Однако в первую очередь нас интересует, делится ли знаменатель на $1+x-x^2$. Проверяем с помощью деления углом (проделайте это самостоятельно) и убеждаемся, что

$$x^4 - x^2 - 2x - 1 = (1+x-x^2)(-x^2-x-1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1-x}{x^2(1+x-x^2)} - \frac{(1-x)(x^2+x+2)}{x(1+x-x^2)(x^2+x+1)} \right) : \frac{1+x-[(1+x^2)^2-x^2]}{x^3(1+x+x^2)} = \\
 &\quad (\text{попутно мы преобразовали вторую скобку}) \\
 &= \frac{(1-x)[1+x+x^2-x(x^2+x+2)]}{x^2(1+x-x^2)(1+x+x^2)} \cdot \frac{x^3(1+x+x^2)}{(-x^4-x^2+x)} = \\
 &= \frac{(-x^3-x+1)(1-x)}{(1+x-x^2)(-x^3-x+1)} = \frac{x-1}{x^2-x-1}.
 \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{x-1}{x^2-x-1}.$

7.3. Приведем первые два слагаемых к общему знаменателю. Получим

$$\frac{A+B(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}},$$

где A и B — соответственно многочлены, входящие множителями в первое и во второе слагаемые.

Раскроем в числителе скобки и приведем подобные. После этого останется

$$\frac{x^{10} + \frac{63}{256}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Преобразуем третье слагаемое:

$$\frac{63}{256} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{63}{256} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Остается вычесть его из предыдущего результата.

.. Ответ. $\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}$, это выражение положительно при $x \neq 0$.

7.4. Домножим дробь на $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} + 2\sqrt[4]{ab}$.

$$\begin{aligned}
 & \frac{(a+2\sqrt{ab}+9b)(\sqrt{a}+3\sqrt{b}+2\sqrt[4]{ab})}{(\sqrt{a}+3\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ab})(\sqrt{a}+3\sqrt{b}+2\sqrt[4]{ab})} = \\
 &= \frac{(a+2\sqrt{ab}+9b)(\sqrt{a}+3\sqrt{b}+2\sqrt[4]{ab})}{a+9b+6\sqrt{ab}-4\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+3\sqrt{b}+2\sqrt[4]{ab}.
 \end{aligned}$$

Остается вычесть $2\sqrt{b}$:

$$\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}.$$

Ответ. $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2.$

7.5. Вынесем за скобки $x^{\frac{2}{m}}$ и воспользуемся выражением x через a :

$$\begin{aligned} x^{\frac{2}{m}} \left[\left(1 + x^{\frac{m-n}{mn}} \right)^2 - 4a^2 x^{\frac{m-n}{mn}} \right] &= \\ = x^{\frac{2}{m}} \left[(1 + a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 1} + a^2 - 1)^2 - 4a^2(a + \sqrt{a^2 - 1})^2 \right] &= \\ = x^{\frac{2}{m}} [4a^2(a + \sqrt{a^2 - 1})^2 - 4a^2(a + \sqrt{a^2 - 1})^2] &= 0. \end{aligned}$$

Ответ. 0.

7.6. Преобразуем данное выражение:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} &= \\ = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} &= \\ = \sqrt{x-1}+1 + |\sqrt{x-1}-1|. \end{aligned}$$

Так как $1 \leq x \leq 2$, то $0 \leq x-1 \leq 1$ и, следовательно, $\sqrt{x-1} \leq 1$, т. е. $\sqrt{x-1}-1 \leq 0$. Поэтому

$$\sqrt{x-1}+1 + |\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1} = 2.$$

Ответ. 2.

7.7. Так как $9+4\sqrt{2} = (2\sqrt{2}+1)^2$, то

$$\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1.$$

Остается преобразовать

$$\sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{43+30\sqrt{2}}.$$

Если догадка, что

$$43+30\sqrt{2} = 25+2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2}+18 = (5+3\sqrt{2})^2$$

кажется вам неестественной, то воспользуйтесь формулой сложного радикала

$$\begin{aligned} \sqrt{43+30\sqrt{2}} &= \sqrt{43+\sqrt{1800}} = \\ &= \sqrt{\frac{43+\sqrt{49}}{2}} + \sqrt{\frac{43-\sqrt{49}}{2}} = 5+3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ответ. $5+3\sqrt{2}$.

7.8. Перепишем данное выражение в виде

$$\begin{aligned} (z^2 - y^2)(xy + zu) + (x^2 - u^2)(xy + zu) + \\ + (y^2 - z^2)(xz + yu) + (x^2 - u^2)(xz + yu) = \\ = (z^2 - y^2)(xy + zu - xz - yu) + (x^2 - u^2)(xy + zu + xz + yu). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} xy + zu - xz - yu &= x(y - z) - u(y - z) = (y - z)(x - u), \\ xy + zu + xz + yu &= (y + z)(x + u), \end{aligned}$$

то получим

$$\begin{aligned} (z - y)(z + y)(y - z)(x - u) + (x - u)(x + u)(y + z)(x + u) = \\ = (x - u)(y + z)[-(y - z)^2 + (x + u)^2]. \end{aligned}$$

Ответ. $(x - u)(y + z)(x + u - y + z)(x + u + y - z)$.

7.9. Раскроем скобки и вынесем коэффициент 2:

$$2(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4).$$

Выражение в скобках разобьем на три группы:

$$\begin{aligned} (x^4 + x^3y + x^2y^2) + (x^3y + x^2y^2 + xy^3) + (x^2y^2 + xy^3 + y^4) = \\ = (x^2 + xy + y^2)^2. \end{aligned}$$

Остается разложить на множители трехчлен $x^2 + xy + y^2$:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= x^2 + xy + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = \\ &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}iy\right)^2 = \left(x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}y\right)\left(x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}y\right). \end{aligned}$$

Ответ. $2\left(x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}y\right)^2\left(x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}y\right)^2$.

7.10. Первый способ. Данное выражение обращается в нуль при $x=y$, $x=z$ и $y=z$. Следовательно, оно делится на $(x-y)(x-z)(y-z)$, т. е.

$$\frac{(y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5}{(x-y)(x-z)(y-z)} = M,$$

где M — многочлен второй степени, однородный относительно x , y и z . Поскольку левая часть не меняется при замене x на y , а y на x , так же как и при любой другой аналогичной замене переменных, то M — симметрический много-

числ относительно x , y и z . Поэтому

$$M = A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + yz + xz),$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Чтобы найти A и B в равенстве

$$\frac{(y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5}{(x-y)(x-z)(y-z)} = A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + yz + xz),$$

положим сначала $x=0$, $y=1$, $z=-1$, а затем $x=0$, $y=2$, $z=1$ (в выборе значений имеется большой произвол, лишь бы обе части имели смысл и не обращались в очевидное тождество). Получим систему

$$\begin{cases} 2A - B = -15, \\ 5A + 2B = -15, \end{cases}$$

откуда $A = -5$, $B = 5$.

Итак,

$$M = -5(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Чтобы стоящее в скобках выражение разложить на линейные множители, снова воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz &= (x + Ky + Nz)(x + Py + Qz) = \\ &= x^2 + KP y^2 + NQ z^2 + (P + K)xy + (Q + N)xz + (KQ + NP)yz. \end{aligned}$$

Получаем для определения K , P , N и Q две простые системы:

$$\begin{cases} KP = 1, \\ K + P = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} NQ = 1, \\ N + Q = -1 \end{cases}$$

и равенство $KQ + NP = -1$, связывающее решения этих систем.

Из первой системы находим:

$$K = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad P = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

или наоборот. При выборе решения второй системы у нас тоже появляются две возможности, однако условие $KQ + NP = -1$ заставляет выбрать из них одну:

$$N = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad Q = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Второй способ. Обозначим $y - z = a$, $z - x = b$, $x - y = c$. Заметим, что $a + b + c = 0$ и поэтому $a + b = -c$ и $(a + b)^5 + c^5 = 0$. После возведения двучлена $a + b$ в пятую степень получим

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 + c^5 = 0,$$

или

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3).$$

Выражение в скобках преобразуем, имея в виду соотношение $a + b = -c$:

$$\begin{aligned} a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 &= (a^3 + b^3) + 2a^2b + 2ab^2 = \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a + b) = (a + b)(a^2 + ab + b^2) = \\ &= -c(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Трехчлен $a^2 + ab + b^2$ раскладывается на множители стандартным методом (см. задачу 7.9). Окончательно получаем

$$a^5 + b^5 + c^5 = 5abc \left(a + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} b \right) \left(a + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} b \right). \text{ Теперь}$$

осталось подставить вместо a , b , c их значения.

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } & 5(x-y)(z-x)(y-z) \left[x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) y + \right. \\ & \left. + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z \right] \cdot \left[x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) y - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z \right]. \end{aligned}$$

7.11. Обозначим

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} = z.$$

Возведем в куб (при этом равносильность не нарушится). Получим

$$\begin{aligned} 12 + 3 \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} \times \\ \times \left(\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} \right) = z^3. \end{aligned}$$

Произведение корней преобразуем так:

$$\sqrt[3]{36 - \frac{847}{27}} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3},$$

выражение в скобках равно z . Придем к уравнению

$$z^3 - 5z - 12 = 0.$$

Так как $z = 3$ — корень этого уравнения, в чем убеждаемся проверкой, то преобразуем уравнение к виду

$$z^3 - 9z + 4z - 12 = 0, \text{ или } (z - 3)(z^3 + 3z + 4) = 0.$$

Уравнение $z^3 + 3z + 4 = 0$ не имеет действительных корней. Следовательно, $z = 3$, что и требовалось доказать.

7.12. По условию $a + b = -c$. Возведем в куб

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$$

и заменим $a + b$ на $-c$. Получим

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Возведем $a + b + c = 0$ в квадрат

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$$

и еще раз возведем в квадрат

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) &= \\ &= 4[a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2(a^2bc + b^2ac + c^2ab)]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$a^2bc + b^2ac + c^2ab = abc(a + b + c) = 0,$$

то

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Преобразуем левую часть тождества, которое нужно доказать:

$$\begin{aligned} a^5(b^2 + c^2) + b^5(a^2 + c^2) + c^5(a^2 + b^2) &= \\ &= a^2b^2(a^3 + b^3) + a^2c^2(a^3 + c^3) + b^2c^2(b^3 + c^3). \end{aligned}$$

Заменим $a^3 + b^3$ на $3abc - c^3$ и поступим аналогично с остальными скобками:

$$\begin{aligned} a^2b^2(3abc - c^3) + a^2c^2(3abc - b^3) + b^2c^2(3abc - a^3) &= \\ = -a^2b^2c^2(c + b + a) + 3abc(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) &= \\ = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4)}{2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

7.13. Если данное равенство доказано при $x \geq 0$ и любым y , то оно верно для всех x и y . Действительно, пусть

$x < 0$. Тогда левую часть можно записать в виде

$$|-(x+y)| + |-(x-y)| = |(-x)-y| + |(-x)+y|,$$

а правую — в виде

$$\begin{aligned} & |-(x + \sqrt{x^2 - y^2})| + |-(x - \sqrt{x^2 - y^2})| = \\ & = |(-x) - \sqrt{(-x)^2 - y^2}| + |(-x) + \sqrt{(-x)^2 - y^2}|. \end{aligned}$$

Поскольку $-x > 0$, то равенство стоящих справа выражений доказано.

Итак, пусть $x \geq 0$. Рассмотрим два случая: $|y| \leq x$ и $|y| > x$.

1) $x \geq 0$, $|y| \leq x$, т. е. $-x \leq y \leq x$. Тогда $x^2 - y^2 \geq 0$ и $\sqrt{x^2 - y^2}$ — неотрицательное действительное число. Кроме того, $x \geq \sqrt{x^2 - y^2}$ и равенство примет вид

$$x + y + x - y = x + \sqrt{x^2 - y^2} + x - \sqrt{x^2 - y^2}, \text{ т. е. } 2x = 2x.$$

2) $x \geq 0$, $|y| > x$, т. е. $y < -x$ или $y > x$. Левая часть равенства в этом случае равна $2|y|$ (случаи $y < -x$ и $y > x$ разберите самостоятельно). Так как $|y| > x$, то $\sqrt{x^2 - y^2} = i\sqrt{y^2 - x^2}$, следовательно,

$$\begin{aligned} & |x + \sqrt{x^2 - y^2}| + |x - \sqrt{x^2 - y^2}| = \\ & = |x + i\sqrt{y^2 - x^2}| + |x - i\sqrt{y^2 - x^2}| = \\ & = \sqrt{x^2 + y^2 - x^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - x^2} = 2|y|. \end{aligned}$$

Тем самым доказательство тождества закончено.

7.14. Так как обе части равенства неотрицательны, то можно каждую из них возвести в квадрат:

$$\begin{aligned} & \left(\left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| \right)^2 = \\ & = \left(\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right)^2 + \left(\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right)^2 + 2 \left| \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 - xy \right|. \end{aligned}$$

Осуществим действия, указанные в скобках, и заметим, что $\left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \geq xy$. Получим

$$x^2 + 2xy + y^2.$$

Если возвести в квадрат правую часть, то получим

$$x^2 + 2|xy| + y^2.$$

Так как по условию $xy = |xy|$, то равенство доказано.

Г л а в а 8

ДЕЛИМОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ. ТЕОРЕМА БЕЗУ. ЦЕЛЫЕ УРАВНЕНИЯ.

8.1. Положив $x - 5 = y$, приведем уравнение к виду

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^4 = 1,$$

или

$$(2y + 1)^4 + (2y - 1)^4 = 16,$$

откуда после простых преобразований

$$16y^4 + 24y^2 - 7 = 0.$$

Ответ. $x_{1,2} = 5 \pm i \frac{\sqrt{7}}{2}$; $x_3 = 4,5$; $x_4 = 5,5$.

8.2. Перемножим попарно первую и третью скобки и две оставшиеся:

$$(12x^2 + 11x + 2)(12x^2 + 11x - 1) = 4.$$

Обозначим

$$12x^2 + 11x + \frac{1}{2} = y,$$

получим

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) = 4,$$

откуда

$$y_1 = -\frac{5}{2}, \quad y_2 = \frac{5}{2}.$$

Остается решить два квадратных уравнения.

Ответ. $x_{1,2} = \frac{-11 \pm i\sqrt{23}}{24}$; $x_{3,4} = \frac{-11 \pm \sqrt{217}}{24}$.

8.3. Запишем уравнение в виде

$$x^2 - 17 = 3y^2$$

и рассмотрим случаи $x = 3k$, $x = 3k \pm 1$. В первом случае левая часть примет вид $9k^2 - 17$ и не будет делиться на три. В остальных двух случаях в левой части получим

$$9k^2 \pm 6k - 16,$$

что снова не делится на три. Поскольку правая часть всегда делится на три, то уравнение не имеет целых решений.

8.4. Решим уравнение относительно x :

$$x = 3y \pm \sqrt{100 - 4y^2} = 3y \pm 2\sqrt{25 - y^2}.$$

Так как уравнение имеет действительные корни лишь при

$$25 - y^2 \geq 0, \text{ т. е. } |y| \leq 5,$$

то остается перебрать все значения y , для которых $\sqrt{25 - y^2}$ — целое число: $y = 0$, $y = \pm 3$, $y = \pm 4$, $y = \pm 5$. Для каждого значения y найдем два значения x .

Ответ. (10; 0), (−10; 0); (−1; −3), (−17; −3); (1; 3), (17; 3); (−6, −4), (−18; −4); (6; 4), (18; 4); (−15, −5), (15, 5).

8.5. По определению деления имеем тождество

$$x^{99} + x^3 + 10x + 5 = Q(x)(x^2 + 1) + ax + b,$$

которое справедливо всюду в области комплексных чисел. Так как частное $Q(x)$ нам неизвестно и оно нас не интересует, то в качестве значения x нужно выбрать один из корней выражения $x^2 + 1$, например $x = i$. Подставив $x = i$, получим

$$i^{99} + i^3 + 10i + 5 = ai + b,$$

т. е.

$$8i + 5 = ai + b,$$

откуда $a = 8$, $b = 5$.

Ответ. $8x + 5$.

8.6. Подставим корень $1 + \sqrt[3]{3}$ в данное уравнение. Получим

$$3(1 + \sqrt[3]{3})^3 + a(1 + \sqrt[3]{3})^2 + b(1 + \sqrt[3]{3}) + 12 = 0.$$

Раскроем скобки и соберем все члены, содержащие $\sqrt[3]{3}$:

$$42 + 4a + b + (18 + 2a + b)\sqrt[3]{3} = 0.$$

Это равенство может выполняться лишь в том случае, если одновременно

$$\begin{cases} 42 + 4a + b = 0, \\ 18 + 2a + b = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем a и b .

Ответ. $a = -12$, $b = 6$.

8.7. Подставим в данное уравнение $x = \sqrt{3} + 1$. После простых вычислений и преобразований получим

$$36 + 10a + 4b + (22 + 6a + 2b)\sqrt{3} = 0.$$

Сумма двух чисел, из которых одно рациональное, а другое иррациональное, может равняться нулю, только если оба числа равны нулю:

$$\begin{cases} 36 + 10a + 4b = 0, \\ 22 + 6a + 2b = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $a = -4$, $b = 1$. Поскольку уравнение

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$$

одним из своих корней имеет число $\sqrt{3} + 1$, а все коэффициенты уравнения — целые, то наряду с этим корнем должен существовать и корень вида $k(\sqrt{3} - 1)$, где k — целое. Подставим это значение x в уравнение и соберем отдельно рациональные и иррациональные члены. Получим систему двух уравнений относительно k

$$\begin{cases} 14k^4 + 20k^3 + 2k^2 - 3k + 1 = 0, \\ 16k^4 + 24k^3 + 2k^2 - 6k = 0. \end{cases}$$

У первого уравнения в качестве целых корней могут выступать только ± 1 . Проверкой убеждаемся, что $k = -1$ удовлетворяет обоим уравнениям. Следовательно, $x = 1 - \sqrt{3}$ — второй корень данного в условии уравнения.

Разделив многочлен $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$ на

$$(x - \sqrt{3} - 1)(x + \sqrt{3} - 1) = x^2 - 2x - 2,$$

получим квадратный трехчлен $x^2 - 2x - 1$, корнями которого являются числа $1 \pm \sqrt{2}$.

Ответ. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$; $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$.

8.8. Из теоремы Виета получаем неравенства:

$$\begin{cases} a+4 > 0, \\ a+1 < 0. \end{cases}$$

Добавляем к ним условие неотрицательности дискриминанта:

$$(a+1)^2 - 4(a+4) \geq 0.$$

Приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} a > -4, \\ a < -1, \\ a^2 - 2a - 15 \geq 0. \end{cases}$$

Последнему неравенству удовлетворяют числа a , лежащие вне промежутка между корнями: $a \leq -3$, $a \geq 5$.

Ответ. $-4 < a \leq -3$.

8.9. Пусть x_1 , x_1q и x_1q^2 — корни данного уравнения. По теореме Виета имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_1q + x_1q^2 = -a, \\ x_1^2q + x_1^2q^2 + x_1^2q^3 = b, \\ x_1^3q^3 = -c. \end{cases}$$

Из этих уравнений нужно исключить x_1 и q . Поскольку из первого уравнения следует

$$x_1(1+q+q^2) = -a,$$

то второе примет вид

$$b = x_1^2q(1+q+q^2) = x_1q(-a),$$

т. е. $x_1q = -\frac{b}{a}$, откуда

$$-\frac{b^3}{a^3} = -c.$$

Ответ. $ca^3 = b^3$.

8.10. По теореме Виета

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = p, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q. \end{cases}$$

Возведем первое уравнение в квадрат:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = 0,$$

откуда найдем $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$. Как видим, последнее уравнение не понадобилось.

Ответ. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -2p$.

8.11. Разделив $x^3 + ax + 1$ на $x - \alpha$, получим в частном $x^2 + \alpha x + a + \alpha^2$, а в остатке $\alpha^3 + a\alpha + 1$. Условия задачи будут выполняться тогда и только тогда, если

$$\alpha^3 + a\alpha + 1 = 0,$$

$$x^2 + \alpha x + a + \alpha^2 > 0 \quad \text{при всех } x.$$

Чтобы выполнялось второе условие, дискриминант $-3\alpha^2 - 4a$ должен быть отрицательным, т. е. $3\alpha^2 + 4a > 0$. Из первого уравнения $a = -\frac{1+\alpha^3}{\alpha}$. Поэтому должно быть

$$3\alpha^2 - 4\frac{1+\alpha^3}{\alpha} > 0.$$

Если $\alpha > 0$, то последнее неравенство эквивалентно такому:

$$3\alpha^3 - 4(\alpha^3 + 1) > 0,$$

или $-\alpha^3 > 4$, у которого нет решений.

Число α не может быть равно нулю, так как уравнение $\alpha^3 + a\alpha + 1 = 0$ не удовлетворяется при $\alpha = 0$.

Если $\alpha < 0$, то получим

$$3\alpha^3 - 4(\alpha^3 + 1) < 0,$$

или $-\alpha^3 < 4$, $\alpha > -\sqrt[3]{4}$.

Ответ. $-\sqrt[3]{4} < \alpha < 0$, $a = -\frac{1+\alpha^3}{\alpha}$.

8.12. Пусть

$$P(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b,$$

где $ax + b$ — остаток, который надо найти.

По теореме Безу $P(2) = 5$, а $P(3) = 7$. Подставим $x = 2$ и $x = 3$ в правую часть написанного выше тождества. Получим систему относительно a и b

$$\begin{cases} 2a + b = 5, \\ 3a + b = 7, \end{cases} \quad \text{откуда } a = 2, b = 1.$$

Ответ. $2x + 1$.

8.13. Многочлен $x^4 + 1$ делится на $x^2 + px + q$ тогда и только тогда, если

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + px + q).$$

Раскрывая в правой части скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему уравнений

$$\begin{cases} p + a = 0, \\ q + ap + b = 0, \\ aq + bp = 0, \\ bq = 1. \end{cases}$$

Из первого и последнего уравнений находим $a = -p$, $b = \frac{1}{q}$.

Подставляя в оставшиеся два уравнения

$$\begin{cases} q - p^2 + \frac{1}{q} = 0, \\ -pq + \frac{p}{q} = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение можно переписать так: $p\left(q - \frac{1}{q}\right) = 0$.

Если $p = 0$, то первое уравнение не имеет действительных решений. Остается $q = \frac{1}{q}$, т. е. $q = \pm 1$. Подставляя найденные значения q в первое уравнение, увидим, что, когда $q = 1$, $p^2 = 2$ и $p = \pm\sqrt{2}$, а когда $q = -1$, $p^2 = -2$ и действительных решений нет. Итак, получаем две возможности: либо $p = \sqrt{2}$ и $q = 1$, либо $p = -\sqrt{2}$ и $q = 1$.

Чтобы закончить решение, нужно сделать проверку. Можно было бы разделить $x^4 + 1$ поочередно на каждый из двух трехчленов: $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ и $x^2 - \sqrt{2}x + 1$. Однако проще убедиться, что

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Ответ. $p_1 = -\sqrt{2}$, $q_1 = 1$; $p_2 = \sqrt{2}$, $q_2 = 1$.

8.14. После замены $x - 1 = y$ получим многочлен

$$(y + 1)^{2n+1} - (2n + 1)(y + 1)^{n+1} + (2n + 1)(y + 1)^n - 1,$$

который должен делиться на y^3 . Вычислим его коэффициенты при y^0 , y^1 и y^2 .

Свободный член этого многочлена равен

$$1 - (2n + 1) + (2n + 1) - 1 = 0;$$

коэффициент при y

$$2n + 1 - (2n + 1)(n + 1) + (2n + 1)n = 0;$$

коэффициент при y^2

$$\begin{aligned} \frac{(2n+1)2n}{2} - (2n+1)\frac{(n+1)n}{2} + (2n+1)\frac{n(n-1)}{2} = \\ = \frac{2n+1}{2}(2n - n^3 - n + n^2 - n) = 0. \end{aligned}$$

Тем самым утверждение доказано.

8.15. Трехчлен $x^2 + x + 1$ имеет различные корни $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Нужно найти такие n , когда эти числа являются корнями данного многочлена, т. е.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1\right)^n - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - 1 = \\ = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - 1 = 0. \end{aligned}$$

Числа $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ — корни двучленных уравнений $x^3 - 1 = 0$ и $x^3 + 1 = 0$, т. е. $\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$, $\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -1$.

Поэтому рассмотрим случаи $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$.

Если $n = 3k$, то

$$\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3k} - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3k} - 1 = (-1)^k - 1^k - 1 \neq 0.$$

Если $n = 3k + 1$, получим

$$(-1)^k \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1.$$

Когда $k = 2m$, то

$$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i - 1 = 0,$$

а когда $k = 2m + 1$, то

$$-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i - 1 \neq 0.$$

Если $n = 3k + 2$, приходим к выражению

$$\begin{aligned} (-1)^k \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^2 - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^2 - 1 = \\ = (-1)^k \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) - \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) - 1. \end{aligned}$$

Убедитесь сами, что для четных $k = 2m$ это выражение не обращается в нуль, а для $k = 2m + 1$ оно равно нулю. Итак, $n = 3k + 1$, где $k = 2m$, и $n = 3k + 2$, где $k = 2m + 1$.

Ответ. $n = 6m + 1$, $n = 6m + 5$, $m = 0, 1, 2, \dots$

8.16. Чтобы данный многочлен делился на $x^2 - x + q$ без остатка, должно выполняться тождество

$$6x^4 - 7x^3 + px^2 + 3x + 2 = (x^2 - x + q)(6x^2 + ax + b).$$

В правой части стоит многочлен

$$6x^4 + (a - 6)x^3 + (b - a + 6q)x^2 + (-b + qa)x + qb.$$

Так как многочлены равны тождественно, получаем систему

$$\begin{cases} a - 6 = -7, \\ b - a + 6q = p, \\ -b + qa = 3, \\ qb = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения $a = -1$. Из третьего и четвертого уравнений исключаем b . Приходим к уравнению

$$q^2 + 3q + 2 = 0,$$

откуда

$$q_1 = -1, \quad q_2 = -2.$$

Сложив второе и третье уравнения, также исключим b :

$$5q - 2 = p.$$

Следовательно,

$$p_1 = -7, \quad p_2 = -12.$$

Итак, возможны два решения.

$$\text{Ответ. } \begin{cases} p_1 = -7, \\ q_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} p_2 = -12, \\ q_2 = -2. \end{cases}$$

Г л а в а 9

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Ответы к упражнениям

1. Абсолютное тождество, так как верно при всех без исключения значениях x .

2. Абсолютное тождество. Верно при $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Если же $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, то обе части теряют смысл.

3. Неабсолютное тождество. Область определения левой части: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, область определения правой части: $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

4—6. Тождество 4 является абсолютным, поскольку это определение секанса. Тождества 5 и 6 неабсолютные, так как правые части определены всегда, в то время как левые могут терять смысл.

7—8. Тождество 7 абсолютное. В самом деле, левая часть теряет смысл при $\cos \frac{x}{2} = 0$. Правая часть может быть записана в виде $\frac{\sin x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$, т. е. тоже теряет смысл при $\cos \frac{x}{2} = 0$.

Тождество 8 неабсолютное. Левая часть теряет смысл при $\cos \frac{x}{2} = 0$, а правая, которая может быть записана в виде

$$\frac{1 - \cos x}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}},$$

перестает существовать как при $\cos \frac{x}{2} = 0$, так и при $\sin \frac{x}{2} = 0$.

9—10. Левую часть равенства 9 можно преобразовать так:

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{2 \sin x \cos x},$$

а правую записать в виде

$$\frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{2 \sin x}{\cos x}}.$$

Обе части этого равенства перестают существовать одновременно, если либо $\cos x = 0$, либо $\sin x = 0$, следовательно, тождество 9 абсолютное.

Тождество 10 является неабсолютным, поскольку при $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ левая часть равна нулю, а правая теряет смысл.

11—13. Первое из этих трех тождеств неабсолютное, второе и третье—абсолютные.

14—16. Первое и второе тождества неабсолютные, третье—абсолютное.

В самом деле, для первого область определения левой части: $x > 0$, $y > 0$; $x < 0$, $y < 0$, а область определения правой части: $x \neq 0$; $y \neq 0$. Для второго область определения левой части $x \neq 0$, а область определения правой части $x > 0$.

Наконец, для третьего $x \neq 0$ для обеих частей тождества.

17. Пусть $x=a$ —корень данного уравнения. Тогда

$$f(a) = \varphi(a).$$

Поскольку $\psi(x)$ существует при всех x , то $\psi(a)$ —число; следовательно,

$$f(a) + \psi(a) = \varphi(a) + \psi(a). \quad (z)$$

Таким образом, $x=a$ —корень уравнения

$$f(x) + \psi(x) = \varphi(x) + \psi(x). \quad (**)$$

Обратно: если $x=a$ —корень (**), то имеет место равенство (*), а потому $x=a$ —корень уравнения $f(x) = \varphi(x)$.

Вторую часть теоремы доказывает пример. В самом деле, достаточно рассмотреть два уравнения:

$$x-1=0 \text{ и } x-1 + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1},$$

первое из которых имеет единственный корень $x=1$, а второе вовсе не имеет корней, так как при $x=1$ оно теряет смысл.

18. Доказательство аналогично 17. Даже пример можно взять тот же самый.

19—19а. Для доказательства достаточно заметить, что посторонними для данного уравнения могут быть те корни уравнения

$$f(x) = \psi(x),$$

для которых $\varphi(x)$ либо не существует, либо обращается в нуль.

20. Если $f(a) = \varphi(a)$, то $[f(a)]^2 = [\varphi(a)]^2$. Обратно: из второго равенства следует, что либо $f(a) = \varphi(a)$, либо $f(a) = -\varphi(a)$.

21. Система равносильна совокупности четырех систем:

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) = 0, \\ g(x), \psi(x) \text{ существуют;} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \psi(x) = 0, \\ g(x), \varphi(x) \text{ существуют.} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \varphi(x) = 0, \\ f(x), \psi(x) \text{ существуют;} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \psi(x) = 0, \\ f(x), \varphi(x) \text{ существуют.} \end{array} \right. \end{array}$$

9.1. При $x < -2$ получим

$$-x + 2x + 2 - 3x - 6 = 0,$$

т. е. $x = -2$, что противоречит предположению. Таким образом, при $x < -2$ уравнение не имеет решений.

При $-2 \leq x \leq -1$ получим $x = -2$.

При $-1 < x \leq 0$ уравнение обращается в ложное числовое равенство $4 = 0$. На этом интервале нет решений.

Наконец, при $x > 0$ получаем $x = -2$, что снова противоречит ограничению.

Ответ: $x = -2$.

9.2. Пусть $x^2 = y$. Тогда

$$|y - 9| + |y - 4| = 5.$$

Точки $y = 4$ и $y = 9$ разбивают числовую ось на три интервала.

Если $y < 4$, уравнение примет вид

$$9 - y + 4 - y = 5,$$

откуда $y = 4$. Это значение не принадлежит выбранному интервалу.

Если $4 \leq y \leq 9$, то знаки абсолютной величины следует раскрыть так:

$$9 - y + y - 4 = 5, \text{ т. е. } 5 = 5.$$

Так как уравнение обратилось в верное числовое равенство, то все значения y из отрезка $4 \leq y \leq 9$ являются решениями.

При $y > 9$ получим

$$y - 9 + y - 4 = 5,$$

т. е. $y = 9$. Здесь снова нет решений. Вспоминая, что $y = x^2$, запишем

$$4 \leq x^2 \leq 9,$$

или

$$2 \leq |x| \leq 3.$$

Ответ. $-3 \leq x \leq -2$; $2 \leq x \leq 3$.

9.3. Первый способ. Дополним стоящую слева сумму квадратов до полного квадрата:

$$\left(x - \frac{3x}{3+x}\right)^2 + \frac{6x^2}{3+x} - 7 = 0,$$

т. е.

$$\left(\frac{x^2}{3+x}\right)^2 + 6\frac{x^2}{3+x} - 7 = 0,$$

откуда получаем совокупность уравнений:

$$\frac{x^2}{3+x} = -7, \quad \frac{x^2}{3+x} = 1.$$

Корни первого: $x_{1,2} = \frac{-7 \pm i\sqrt{35}}{2}$; корни второго: $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Так как значения $x = -3$ среди корней нет, то это и есть корни исходного уравнения.

Второй способ. Введем новое неизвестное: $\frac{3x}{3+x} = u$, или $3x = 3u + xu$.

Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + u^2 = 7, \\ xu = 3(x - u). \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения удвоенное второе, придем к уравнению относительно $x - u$

$$(x - u)^2 + 6(x - u) - 7 = 0,$$

откуда следует совокупность двух уравнений:

$$x - u = -7, \quad x - u = 1.$$

Решая первое, получим

$$x - \frac{3x}{3+x} = -7, \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm i\sqrt{35}}{2},$$

а решая второе, найдем

$$x - \frac{3x}{3+x} = 1, \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Ответ.

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm i\sqrt{35}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

9.4. Возведем данное уравнение в куб:

$$3x - 3 + 3\sqrt[3]{x(2x-3)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}) = 12(x-1).$$

Стоящий в скобках двучлен заменим правой частью данного уравнения и приведем подобные члены:

$$3\sqrt[3]{x(2x-3)}\sqrt[3]{12(x-1)} = 9(x-1).$$

Такая замена может привести к появлению посторонних корней. В самом деле, при возведении $a + b = c$ в куб мы получаем равенство, справедливое при всех тех же значениях a , b и c , что и данное равенство. После замены же мы получим

$$a^3 + b^3 + 3abc = c^3.$$

Это равенство удовлетворяется при $a = b = 1$, $c = -1$, в то время как исходное равенство $a + b = c$ при этих значениях букв ложно. Следовательно, мы должны завершить решение проверкой.

Возведем последнее иррациональное уравнение в куб. После сокращения получим

$$4x(2x-3)(x-1) = 9(x-1)^3.$$

Один корень этого уравнения $x_1 = 1$; остается квадратное уравнение

$$x^2 - 6x + 9 = 0, \quad x_{2,3} = 3.$$

Сделав проверку, убеждаемся, что найденные корни подходят.

Ответ. $x_1 = 1$; $x_{2,3} = 3$.

9.5. Пусть $\sqrt[4]{629-x} = u$, $\sqrt[4]{77+x} = v$. Придем к системе

$$\begin{cases} u^4 + v^4 = 706, \\ u + v = 8. \end{cases}$$

Это — симметрическая система, ее обычно решают подстановкой: $u + v = s$, $uv = t$. Поэтому преобразуем левую

часть первого уравнения:

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 &= (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = [(u + v)^2 - 2uv]^2 - 2u^2v^2 = \\ &= (64 - 2t)^2 - 2t^2 = 64^2 - 256t + 2t^2. \end{aligned}$$

Поскольку все это равно 706, получаем квадратное уравнение

$$t^2 - 128t + 1695 = 0,$$

откуда

$$t_1 = 15, \quad t_2 = 113.$$

Остается решить совокупность двух систем:

$$\begin{cases} u + v = 8, \\ uv = 15, \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = 8, \\ uv = 113. \end{cases}$$

Решая первую, найдем $v_1 = 3, v_2 = 5$, откуда $x_1 = 4, x_2 = 548$. Вторая не имеет действительных решений.

Проверкой убеждаемся, что найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ. $x_1 = 4; x_2 = 548$.

9.6. Введем новые неизвестные:

$$\sqrt[5]{x^2 - 34x + 64} = u, \quad \sqrt[5]{x^2 - 34x + 83} = v.$$

Получим систему

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u^5 - v^5 = 31. \end{cases}$$

Обозначим $u + v = p$. Так как, в силу первого уравнения системы, $u - v = 1$, то $u = \frac{p+1}{2}, v = \frac{p-1}{2}$. Второе уравнение системы примет вид

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^5 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^5 = 31,$$

или после очевидных упрощений

$$p^4 + 2p^2 - 99 = 0.$$

Это биквадратное уравнение имеет два действительных корня: $p_1 = -3, p_2 = 3$. Зная p_1 и p_2 , найдем $u_1 = -1, u_2 = 2$,

откуда получим два уравнения для определения значений x :

$$x^2 - 34x + 65 = 0, \quad x^2 - 34x + 32 = 0.$$

Решив эти уравнения, найдем четыре корня.

Ответ. $x_{1,2} = 17 \pm \sqrt{257}$; $x_{3,4} = 17 \pm \sqrt{224}$.

9.7. Введем новые неизвестные:

$$u = \sqrt[4]{a-x}, \quad v = \sqrt[4]{x-b},$$

т. е. $u^4 + v^4 = a - b$.

Получаем систему

$$\begin{cases} u^4 + v^4 = a - b, \\ \frac{v^4 u + u^4 v}{u + v} = \frac{a - b}{2}. \end{cases}$$

Заменяя во втором уравнении $a - b$ на $u^4 + v^4$, получим

$$\frac{v^4 u + u^4 v}{u + v} = \frac{u^4 + v^4}{2},$$

откуда

$$u^5 + v^5 - uv^4 - u^4 v = 0, \quad \text{где } u + v \neq 0,$$

т. е.

$$u^4(u - v) - v^4(u - v) = 0,$$

а потому

$$(u - v)^2 (u^2 + v^2) (u + v) = 0.$$

Так как последние два множителя в нуль обратиться не могут, то остается

$$u = v, \quad \text{т. е. } a - x = x - b,$$

и, следовательно,

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

Проверкой убеждаемся, что это — корень исходного уравнения, если $a > b$.

Ответ. При $a > b$ $x = \frac{a+b}{2}$.

9.8. Обозначив $\sqrt{a+x} = y$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a+x} = y, \\ \sqrt{a-y} = x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+x = y^2 \\ a-y = x^2. \end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения второе:

$$x + y = (y - x)(x + y).$$

Если $x + y = 0$, то $x = y = 0$, поскольку и x , и y неотрицательны. Так как $y = \sqrt{a + x}$, то из $x = y = 0$ следует, что $a = 0$. Проверкой убеждаемся, что найден корень данного уравнения.

Если $x + y \neq 0$, то $y - x - 1 = 0$, откуда $1 + x = \sqrt{a + x}$ и $x^2 + x + 1 - a = 0$. Решая квадратное уравнение, найдем $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$. Остается исследовать, при каких значениях a эти корни вещественны и удовлетворяют исходному уравнению.

Во-первых, необходимо, чтобы дискриминант был неотрицательным, т. е. $a \geq \frac{3}{4}$.

Во-вторых, корень данного уравнения не должен быть отрицательным. Один из корней $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{4a-3}}{2}$ при всех $a \geq \frac{3}{4}$ отрицателен, а потому не подходит. Другой корень $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$ больше или равен нулю, если $\sqrt{4a-3} \geq 1$, т. е. $a \geq 1$.

Проверкой убеждаемся, что $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$ удовлетворяет первоначальному уравнению. В самом деле, подставляя x_1 в это уравнение, получим

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x_1}} = x_1,$$

что выполняется одновременно с равенством

$$a - \sqrt{a + x_1} = x_1^2,$$

так как $x_1 \geq 0$. Значение x_1 было найдено из уравнения $\sqrt{a + x} = 1 + x$. Поэтому можно осуществить в полученном нами равенстве соответствующую замену:

$$a - 1 - x_1 = x_1^3.$$

Так как в результате мы пришли к уравнению, из которого определили x_1 , то проверку можно считать законченной.

Ответ. $x = 0$, если $a = 0$, и $x = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$, если $a \geq 1$.

9.9. Перенесем $\sqrt{|x|}$ в правую часть уравнения:

$$\sqrt{|x|+1} = a + \sqrt{|x|},$$

и возведем обе части в квадрат. Получим

$$1 = a^2 + 2a\sqrt{|x|},$$

откуда при $a \neq 0$

$$\sqrt{|x|} = \frac{1-a^2}{2a}, \quad |x| = \frac{(1-a^2)^2}{4a^2}, \quad x = \pm \frac{(1-a^2)^2}{4a^2}.$$

Делаем проверку, подставляя найденное значение x в данное уравнение. В левой части получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(a^2-1)^2+4a^2}{4a^2}} - \sqrt{\frac{(a^2-1)^2}{4a^2}} &= \frac{a^2+1}{2|a|} - \frac{|a^2-1|}{2|a|} = \\ &= \frac{a^2+1}{2|a|} - \frac{|(a+1)(a-1)|}{2|a|}. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить это выражение, нужно рассмотреть четыре различных случая, так как значения $-1, 0, +1$ параметра a разбивают числовую ось на четыре интервала. Однако легко заметить, что $a > 0$, так как разность, стоящая в левой части исходного уравнения, всегда положительна. Следовательно, остается рассмотреть только два случая.

Если $0 < a \leq 1$, то

$$\frac{a^2+1}{2|a|} - \frac{|a^2-1|}{2|a|} = \frac{a^2+1-1+a^2}{2a} = a.$$

Если же $a > 1$, то

$$\frac{a^2+1}{2|a|} - \frac{|a^2-1|}{2|a|} = \frac{a^2+1-a^2+1}{2a} = \frac{1}{a}.$$

Число $\frac{1}{a}$ равно числу a только при $a = \pm 1$, а по предположению $a > 1$.

Ответ. $x = \pm \frac{(1-a^2)^2}{4a^2}$, если $0 < a \leq 1$.

9.10. Рассмотрим два случая.

Если $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$, т. е. $x \leq -\frac{1}{2}$, $x \geq 2$, получим уравнение

$$4x^2 + 5x - 2(1 + \beta) = 0.$$

Корни этого уравнения $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57+32\beta}}{8}$ должны лежать вне интервала $(-\frac{1}{2}, 2)$.

Неравенство

$$\frac{-5 - \sqrt{57+32\beta}}{8} \leq -\frac{1}{2}$$

удовлетворяется при $\beta \geq -\frac{57}{32}$. Больше двух этот корень никогда стать не может.

Для x_2 нужно решить два неравенства:

$$\frac{-5 + \sqrt{57+32\beta}}{8} \leq -\frac{1}{2}, \quad \frac{-5 + \sqrt{57+32\beta}}{8} \geq 2.$$

Первое выполняется при $-\frac{57}{32} \leq \beta \leq -\frac{7}{4}$, а второе при $\beta \geq 12$.

Пусть теперь $2x^2 - 3x - 2 < 0$, т. е. $-\frac{1}{2} < x < 2$. Данное уравнение станет линейным и мы найдем

$$x_3 = \frac{2(\beta-1)}{11}.$$

Решим неравенство

$$-\frac{1}{2} < \frac{2(\beta-1)}{11} < 2$$

и получим

$$-\frac{7}{4} < \beta < 12.$$

Итак, при $\beta = -\frac{57}{32}$ корни x_1 и x_2 совпадают, а корень x_3 не существует, т. е. уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{5}{8}$. Если $-\frac{57}{32} < \beta \leq -\frac{7}{4}$, то уравнение имеет два решения: x_1 и x_2 ; если $-\frac{7}{4} < \beta < 12$, то x_1 и x_3 ; а если $\beta \geq 12$, то два решения: x_1 и x_2 .

Остается проверить, что x_1 и x_3 не равны при $-\frac{7}{4} < \beta < 12$, в чем легко убедиться непосредственно.

Ответ. $\beta = -\frac{57}{32}$.

9.11. Если $x \geq 0$, $y \geq 0$, то получим систему

$$\begin{cases} y - 2x + 3 = 0, \\ y + x - 3 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1. \end{cases}$$

Если $x \geq 0$, $y \leq 0$, то

$$\begin{cases} y - 2x + 3 = 0, \\ -y + x - 3 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = -3. \end{cases}$$

Если $x \leq 0$, $y \geq 0$, то

$$\begin{cases} y + 2x + 3 = 0, \\ y + x - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_3 = -6, \\ y_3 = 9. \end{cases}$$

Если $x \leq 0$, $y \leq 0$, то

$$\begin{cases} y + 2x + 3 = 0, \\ -y + x - 3 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_4 = 0, \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

Каждое из четырех решений удовлетворяет записанным ограничениям.

Ответ. (2, 1); (0, -3); (-6, 9); (0, -3).

9.12. Исключая последовательно y и x , найдем

$$x = \frac{k+16}{7}, \quad y = \frac{8-3k}{7}.$$

Остается решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{k+16}{7} > \frac{1}{k}, \\ \frac{8-3k}{7} > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \frac{k^2+16k-7}{k} > 0, \\ k < \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Первое неравенство равносильно такому:

$$(k+8+\sqrt{71})(k+8-\sqrt{71})k > 0.$$

Приходим к системе

$$\begin{cases} -8-\sqrt{71} < k < 0, & k > -8+\sqrt{71} \\ k < \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Так как $-8+\sqrt{71} < \frac{8}{3}$, то условию задачи удовлетворяют два интервала.

Ответ. $-8-\sqrt{71} < k < 0$; $-8+\sqrt{71} < k < \frac{8}{3}$.

9.13. Если $x \geq -y$ и $x \geq y$, то получим систему

$$\begin{cases} x+y = x-y+a, \\ x-y = x+y+b, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{a}{2}, \\ y = -\frac{b}{2}, \end{cases}$$

которая имеет решение

$$\begin{cases} x \geq \frac{|a|}{2}, \\ y = \frac{a}{2} \end{cases}$$

при условии $a = -b$.

Если $x \geq -y$, но $x \leq y$, то

$$\begin{cases} x+y = x-y+a, \\ y-x = x+y+b, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} y = \frac{a}{2}, \\ x = -\frac{b}{2}. \end{cases}$$

Из условия $x \geq -y$ находим $-\frac{b}{2} \geq -\frac{a}{2}$, а из второго условия: $-\frac{b}{2} \leq \frac{a}{2}$. Оба эти неравенства соответствуют условию $a \geq |b|$.

Если $x \leq -y$, а $x \geq y$, то

$$\begin{cases} -x-y = x-y+a, \\ x-y = x+y+b, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x = -\frac{a}{2}, \\ y = -\frac{b}{2}. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения x и y в ограничения, получим $b \geq |a|$.

Наконец, если $x \leq -y$, $x \leq y$, получим

$$\begin{cases} -x-y = x-y+a, \\ y-x = x+y+b, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x = -\frac{a}{2}, \\ x = -\frac{b}{2}. \end{cases}$$

Это значит, что $a = b$. Так как $y \geq x$, но $y \leq -x$, то $-x \geq 0$. Окончательно получим при $a = b \geq 0$

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{2}, \\ -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Ответ. При $a = -b$, $x \geq \frac{|a|}{2}$, $y = \frac{a}{2}$; при $a \geq |b|$, $x = -\frac{b}{2}$, $y = \frac{a}{2}$; при $b \geq |a|$, $x = -\frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$; при $a = b \geq 0$, $x = -\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}$.

9.14. Уравнение $x^2 + y^2 = a$ при $a < 0$ не имеет решений. Если $a \geq 0$, то это — уравнение окружности радиуса $\sqrt{a}$. Второе уравнение определяет стороны квадрата, диагонали которого равны 2 и расположены на осях координат (рис. Р.9.14).

При увеличении a окружность будет увеличиваться и сначала окажется вписанной в квадрат, затем пересечет его в восьми точках и, наконец, будет описана около квадрата.

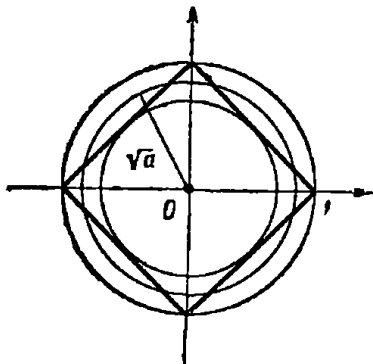


Рис. Р.9.14.

Итак, если $\sqrt{a} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то система не имеет решений.

Если $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $a = \frac{1}{2}$, получим четыре решения: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ и три симметричных: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Если $\frac{1}{2} < a < 1$, то восемь решений. Мы найдем их, возведя первое уравнение в квадрат и получив с помощью второго уравнения, что $|x| \cdot |y| = \frac{1-a}{2}$. В результате придем к системе

$$\begin{cases} |x| \cdot |y| = \frac{1-a}{2}, \\ |x| + |y| = 1, \end{cases}$$

которая при положительных x и y имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2a-1}), \\ y_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2a-1}), \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2a-1}), \\ y_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2a-1}), \end{cases}$$

К этим решениям нужно добавить шесть симметричных.

Если $a = 1$, то у системы четыре решения: $x_1 = 1, y_1 = 0$; $x_2 = 0, y_2 = 1$; $x_3 = -1, y_3 = 0$; $x_4 = 0, y_4 = -1$. При $a > 1$ решений нет.

9.15. Если либо $x = 0$, либо $y = 0$, то второе неизвестное тоже равно нулю. Получаем очевидное решение

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

Если $xy \neq 0$, то можно первое уравнение разделить на x , а второе — на $x^2 y^2$. Получим систему

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 18, \\ x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 208. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$x + \frac{1}{x} = u, \quad y + \frac{1}{y} = v.$$

Возводя каждое из этих равенств в квадрат, получим

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = v^2 - 2.$$

Система примет вид

$$\begin{cases} u + v = 18, \\ u^2 + v^2 = 212. \end{cases}$$

Решая ее, найдем: $u_1 = 4, v_1 = 14$; $u_2 = 14, v_2 = 4$. (Если первое уравнение возвести в квадрат и сравнить со вторым, то получим $uv = 56$.)

Остается решить две системы:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 4, \\ y + \frac{1}{y} = 14, \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 14, \\ y + \frac{1}{y} = 4, \end{cases}$$

в результате чего получим восемь решений.

Ответ. $(0, 0)$; $(2 + \sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3})$; $(2 + \sqrt{3}, 7 - 4\sqrt{3})$; $(2 - \sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3})$; $(2 - \sqrt{3}, 7 - 4\sqrt{3})$; $(7 + 4\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$; $(7 + 4\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$; $(7 - 4\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$; $(7 - 4\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$.

9.16. Из первого уравнения находим

$$y - z = xy - x.$$

Подставляя во второе, получим

$$xz = 2(x - xy + x),$$

т. е.

$$xz = 2x(2 - y).$$

Если $x = 0$, то система принимает вид

$$\begin{cases} 0 = y - z, \\ 0 = 2(z - y), \\ yz = 3(y + z), \end{cases} \quad \text{т. е. } y = z \text{ и } y^2 = 6y.$$

Получаем два решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \\ z_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 6, \\ z_2 = 6. \end{cases}$$

Если $x \neq 0$, то $z = 2(2 - y)$. Подставляем во второе и третье уравнения

$$\begin{cases} x = xy - 3y + 4, \\ 7y - 2y^2 = -3x + 12. \end{cases}$$

Подставим x из первого уравнения во второе:

$$7y - 2y^2 = -3xy + 9y.$$

Если $y = 0$, то получаем еще одно решение:

$$\begin{cases} x_3 = 4, \\ y_3 = 0, \\ z_3 = 4. \end{cases}$$

Если $y \neq 0$, то $3x - 2y = 2$, откуда $x = \frac{2(y+1)}{3}$. Подставляем в первое уравнение последней системы уравнений, которое превращается в квадратное уравнение относительно y :

$$2y^2 - 9y + 10 = 0,$$

откуда $y_4 = 2$, $y_5 = \frac{5}{2}$. Делаем проверку.

Ответ. $(0, 0, 0)$; $(0, 6, 6)$; $(4, 0, 4)$; $(2, 2, 0)$; $\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{2}, -1\right)$.

9.17. Возведем уравнение $x + y = -z$ в квадрат:

$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2,$$

и сравним со вторым уравнением системы; найдем $xy = -10$.

Преобразуем сумму $x^4 + y^4$ из третьего уравнения следующим образом:

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (20 + z^2)^2 - 200,$$

где на последнем шаге были использованы второе уравнение системы и найденное значение для xy . Подставив это выражение в третье уравнение системы, получим

$$z^2 = 9, \quad \text{т. е. } z = \pm 3.$$

Остается решить каждую из систем:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ xy = -10. \end{cases}$$

Производим проверку.

Ответ. $(-2, 5, -3); (5, -2, -3); (2, -5, 3); (-5, 2, 3)$.

9.18. Третье уравнение можно записать так:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0.$$

Из первого уравнения мы знаем, что $x + y = 1 - z$. Поэтому

$$(1 - z)(x^2 - xy + y^2 - z^2 - z - 1) = 0.$$

Если $z = 1$, то $x + y = 0$. Тогда из второго уравнения получим $xy = -4$. В итоге — два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -2, \\ z_1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 2, \\ z_2 = 1. \end{cases}$$

Если же $1 - z \neq 0$, то

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 - z - 1 = 0. \quad (1)$$

Чтобы упростить уравнение (1), снова воспользуемся тем, что $x + y = 1 - z$, а потому

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1 - 2z + z^2. \quad (2)$$

Вычитая уравнение (2) из уравнения (1), получим

$$xy = -z.$$

Теперь второе уравнение исходной системы

$$xy + z(x + y) = -4$$

можно переписать как уравнение относительно z

$$-z + z(1 - z) = -4.$$

Решая его, найдем, что либо $z = -2$, либо $z = 2$. В первом случае мы приходим к системе

$$\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 2, \\ z_3 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = 1, \\ z_4 = -2. \end{cases}$$

Во втором случае получаем

$$\begin{cases} xy = -2, \\ x + y = -1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_5 = -2, \\ y_5 = 1, \\ z_5 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = 1, \\ y_6 = -2, \\ z_6 = 2. \end{cases}$$

После того как были найдены первые два решения, решение системы можно было закончить следующим рассуждением.

Данная система симметрична относительно x , y и z . Поэтому одно ее решение $(2, -2, 1)$ порождает $3! = 6$ решений, получающихся в результате всевозможных перестановок. Таким образом, мы получим шесть различных решений системы.

С другой стороны, система может иметь не больше решений, чем произведение степеней ее уравнений: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Поскольку все шесть решений найдены, решение системы можно считать законченным, если проверить одно из найденных решений.

Ответ. $(2, -2, 1)$; $(-2, 2, 1)$; $(1, 2, -2)$; $(2, 1, -2)$; $(-2, 1, 2)$; $(1, -2, 2)$.

9.19. Возведя первое уравнение в квадрат, получим

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2.$$

Так как $x^2 + y^2 = b$, то

$$xy = \frac{a^2 - b}{2}.$$

Возведем первое уравнение в куб:

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = a^3.$$

Заменяя $x^3 + y^3$ на c , а xy и $x + y$ соответственно на $\frac{a^2 - b}{2}$ и a , получим равенство

$$c + \frac{3(a^2 - b)}{2} a = a^3,$$

не содержащее x и y .

Ответ. $a^3 = 3ab - 2c$.

9.20. Умножив первое уравнение на xy^2z^2 , а второе — на x^2yz^2 , получим у первых двух уравнений равные правые части:

$$\begin{cases} 4x(y+z) = 3x^2y^2z^2, \\ 4y(x+z) = 3x^2y^2z^2. \end{cases}$$

При этом могут быть получены посторонние решения, у которых одно из неизвестных обращается в нуль. Эти решения можно сразу отбросить, так как система в этом случае не удовлетворяется.

Сравним левые части полученных уравнений

$$4z(x-y) = 0.$$

Так как $z \neq 0$, то $x = y$. Из третьего уравнения системы получаем $z = \frac{1}{x^3}$. Подставим в первое уравнение

$$4x^4 + 1 = 0.$$

Уравнение имеет только мнимые решения. Чтобы найти их, разложим левую часть последнего уравнения на множители:

$$\begin{aligned} 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 &= (2x^2 + 1)^2 - 4x^2 = \\ &= (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1). \end{aligned}$$

Получаем четыре значения x :

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm i}{2}.$$

Так как $y = x$, а $z = \frac{1}{x^3}$, то находим четыре решения системы. Производим проверку.

Ответ. $\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{2}, -2(1+i)\right); \left(\frac{1-i}{2}, \frac{1-i}{2}, 2(i-1)\right);$
 $\left(\frac{i-1}{2}, \frac{i-1}{2}, 2(1-i)\right); \left(-\frac{1+i}{2}, -\frac{1+i}{2}, 2(1+i)\right).$

9.21. Возведя второе уравнение в квадрат, найдем

$$(x+y)^2 = \frac{x^2 y^2}{4}.$$

Подставим в первое уравнение

$$x^4 + y^4 = \frac{17}{4} x^2 y^2,$$

т. е.

$$(x^2 - y^2)^2 = \frac{9}{4} x^2 y^2,$$

откуда

$$x^2 - y^2 = \pm \frac{3}{2} xy,$$

или, воспользовавшись вторым уравнением исходной системы, получим

$$x^2 - y^2 = \pm 3(x+y),$$

откуда

$$(x+y)(x-y \pm 3) = 0.$$

Если $x+y=0$, то и $xy=0$, следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

Если $x-y=3$, то, подставляя во второе уравнение данной системы $y=x-3$, приходим к уравнению $x^2-7x+6=0$, с помощью которого найдем два решения системы:

$$\begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 6, \\ y_3 = 3. \end{cases}$$

Если же $x-y=-3$, то аналогично получим

$$\begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = 3, \\ y_5 = 6. \end{cases}$$

Производим проверку.

Ответ. $(0, 0)$; $(1, -2)$; $(6, 3)$; $(-2, 1)$; $(3, 6)$.

9.22. Умножим первое уравнение на t

$$xt + yt = t$$

и вычтем из второго. Аналогично поступим со вторым и третьим уравнениями. Придем к системе, не содержащей y :

$$\begin{cases} x(z-t) = 2-t, \\ xz(z-t) = 5-2t, \\ xz^2(z-t) = 14-5t. \end{cases}$$

В результате могут быть получены посторонние решения, в которых $t=0$. Однако решение нашей системы мы закончим проверкой, благодаря которой все посторонние решения будут отсеяны.

Повторим ту же операцию, которая была проделана относительно t , для z : умножим первое и второе уравнения последней системы на z и вычтем их соответственно из второго и третьего. Тем самым мы исключим x :

$$\begin{cases} 2z-tz = 5-2t, \\ 5z-2tz = 14-5t. \end{cases}$$

В этом случае $z=0$ может дать посторонние решения.

Исключим из полученных уравнений tz и выразим z через t :

$$z = 4-t, \text{ т. е. } z+t=4.$$

Второе уравнение последней системы можно записать в виде

$$5(z+t)-2tz=14,$$

откуда $tz=3$. У системы

$$\begin{cases} z+t=4, \\ zt=3 \end{cases}$$

есть два решения:

$$\begin{cases} z_1=3, \\ t_1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} z_2=1, \\ t_2=3. \end{cases}$$

Из первоначальных первого и второго уравнений находим x и y и делаем проверку.

Система имеет два решения.

Ответ. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, 1\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 3\right)$.

9.23. Возведем первое уравнение в квадрат и вычтем из второго уравнения. После упрощения получим

$$2xy - 3xz + 6yz = 54.$$

Третье уравнение позволяет заменить $3xz$ на $4y^2$:

$$2xy - 4y^2 + 6yz = 54,$$

или

$$xy - 2y^2 + 3yz = 27. \quad (1)$$

Вычтем из уравнения (1) первое уравнение системы, умноженное на y^1), получим

$$y = 3.$$

Подставим в первое и третье уравнения системы

$$\begin{cases} x + 3z = 15, \\ xz = 12. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем два решения:

$$x_1 = 3, z_1 = 4; x_2 = 12, z_2 = 1.$$

Производим проверку.

Ответ. (3, 3, 4); (12, 3, 1).

9.24. Сложив почленно первое уравнение со вторым, первое с третьим и, наконец, второе с третьим, получим систему

$$\begin{cases} x^3 = xyz + 2, \\ y^3 = xyz - 3, \\ z^3 = xyz + 3. \end{cases}$$

Перемножим эти уравнения и обозначим $xyz = u$:

$$u^3 = (u + 2)(u^2 - 9),$$

а после упрощения

$$2u^2 - 9u - 18 = 0,$$

откуда $u_1 = 6$, $u_2 = -\frac{3}{2}$.

¹⁾ Такое преобразование системы, вообще говоря, может привести к приобретению постороннего решения, в котором $y = 0$.

Для первого значения u находим $x^3=8$, $y^3=3$, $z^3=9$, аналогично поступаем с u_2 . Производим проверку.

Ответ. $(2, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{9})$; $(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}})$.

9.25. Обозначим $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$. Тогда уравнение, стоящее на месте с номером k , примет вид

$$x_k(s - x_k) + k(k+1)s^2 = (2k+1)^2 a^2,$$

или

$$x_k^2 - sx_k - k(k+1)s^2 + (2k+1)^2 a^2 = 0,$$

откуда

$$x_k = \frac{1}{2} [s \pm (2k+1) \sqrt{s^2 - 4a^2}].$$

Возьмем для всех x_k знак минус и сложим выражения для всех x_k . Получим уравнение относительно s

$$s(n-2) = (n+2)n \sqrt{s^2 - 4a^2},$$

откуда

$$s = \frac{2n(n+2)|a|}{\sqrt{n^2(n+2)^2 - (n-2)^2}}.$$

Мы взяли перед корнем знак плюс, так как из уравнения для s видно, что $s \geq 0$; знаменатель не обращается в нуль ни при каких натуральных n .

Остается подставить найденное значение s в выражение для x_k и сделать проверку.

Ответ. $x_k = \frac{n(n+2) - (n-2)(2k+1)}{\sqrt{n^2(n+2)^2 - (n-2)^2}} |a|$.

9.26. Пусть $7x - 11y = u$, т. е. $7(x+y) - 18y = u$, откуда $x+y = \frac{u+18y}{7}$, а $x+9y = (x+y) + 8y = \frac{u+74y}{7}$.

Приходим к системе

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{\frac{u+18y}{7}}, \\ u = \sqrt[5]{\frac{u+74y}{7}}, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} 7u^3 - u = 18y, \\ 7u^5 - u = 74y. \end{cases}$$

Из последней системы исключим y :

$$\frac{7u^3 - u}{18} = \frac{7u^5 - u}{74}.$$

Если $u=0$, то, как легко видеть, приходим к очевидному решению: $x_1=y_1=0$.

Если $u \neq 0$, то получаем уравнение

$$\frac{7u^2-1}{9} = \frac{7u^4-1}{37}, \text{ т. е. } 9u^4 - 37u^2 + 4 = 0,$$

откуда $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = -\frac{1}{3}$, $u_3 = 2$, $u_4 = -2$.

Для каждого значения u составляем систему

$$\begin{cases} 7x - 11y = u, \\ x + y = u^3. \end{cases}$$

Делаем проверку.

Ответ. $(0, 0)$; $\left(\frac{10}{243}, -\frac{1}{243}\right)$; $\left(-\frac{10}{243}, \frac{1}{243}\right)$; $(5, 3)$; $(-5, -3)$.

9.27. Если сложить уравнения системы и вычесть из первого второе, получим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = 2\sqrt{y}, \\ \sqrt{a-x} - \sqrt{b-x} = 2\sqrt{y-x}. \end{cases} \quad (1)$$

Возведем каждое из уравнений системы (1) в квадрат и вычтем из первого полученного уравнения второе. Получим

$$\sqrt{(a-x)(b-x)} = x,$$

т. е.

$$(a-x)(b-x) = x^2,$$

или

$$(a+b)x = ab.$$

Если $a+b=0$, но $ab \neq 0$, то последнее уравнение, а следовательно, и данная система не имеют решений.

Если $a+b=0$ и $ab=0$, то $a=b=0$. Написанная в начале решения система принимает вид

$$\begin{cases} \sqrt{-x} = \sqrt{y}, \\ 0 = \sqrt{y-x}, \end{cases}$$

откуда $y = -x$ и $y = x$ одновременно, т. е. при $a=b=0$ система имеет единственное решение $x=y=0$.

Если $a+b \neq 0$, то $x = \frac{ab}{a+b}$.

Из уравнения $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = 2\sqrt{y}$ находим y :

$$\sqrt{a - \frac{ab}{a+b}} + \sqrt{b - \frac{ab}{a+b}} = 2\sqrt{y},$$

т. е. $\frac{|a|+|b|}{\sqrt{a+b}} = 2\sqrt{y}$, откуда $y = \frac{(|a|+|b|)^2}{4(a+b)}$.

Так как $a+b$ стоит в предпоследнем уравнении под радикалом и $a+b \neq 0$, то $a+b > 0$.

Преобразовывая систему, мы получили уравнение $\sqrt{(a-x)(b-x)} = x$. Следовательно, $x \geq 0$, т. е. $ab \geq 0$, а значит, и $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Теперь можно записать, что

$$y = \frac{a+b}{4}.$$

Делаем проверку. Первое уравнение системы после подстановки примет вид

$$2a - |a-b| = a+b.$$

Если $a \geq b$, то это уравнение удовлетворяется, а если $a < b$, то получим $a=b$, что противоречит предположению $a < b$.

Второе уравнение системы после подстановки дает равенство

$$2b + |a-b| = a+b.$$

При $a \geq b$ получаем тождество.

Ответ. Если $a \geq b \geq 0$ и $a+b > 0$, то $x = \frac{ab}{a+b}$, $y = \frac{a+b}{4}$; если $a=b=0$, то $x=y=0$.

9.28. Обозначим $\sqrt{y}=z$. Тогда система переншется в виде

$$\begin{cases} \sqrt{x+z} - \sqrt{x-z} = 1, \\ \sqrt{x^2-z^2} + \sqrt{x^2+z^2} = 1. \end{cases}$$

Дважды возведем первое уравнение в квадрат: $2\sqrt{x^2-z^2} = 2x-1$, отсюда $\sqrt{x^2-z^2} = x - \frac{1}{2}$; далее

$$4z^2 = 4x-1,$$

или

$$z^2 = x - \frac{1}{4}.$$

Заменяя $\sqrt{x^2 - z^2}$ выражением $x - \frac{1}{2}$, перепишем второе уравнение системы так:

$$\sqrt{z^2 + x^2} = \frac{3}{2} - x.$$

Из последнего уравнения находим z^2 :

$$z^2 = \frac{9}{4} - 3x,$$

и сравниваем с выражением для z^2 , полученным из первого уравнения:

$$x - \frac{1}{4} = \frac{9}{4} - 3x.$$

Отсюда $x = \frac{5}{8}$, а $y = z^2 = \frac{3}{8}$.

Проверяем найденные значения x и y . Левая часть первого уравнения системы примет вид

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{3}{8}}} - \sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{3}{8}}} &= \frac{\sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{5 - \sqrt{24}}}{\sqrt{8}} = \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{5 - \sqrt{24}})^2}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 1. \end{aligned}$$

Левая часть второго уравнения вычисляется проще:

$$\sqrt{\frac{25}{64} - \frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{25}{64} + \frac{3}{8}} = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = 1.$$

Ответ. $\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

9.29. Первый способ. Так как a и b положительны, то из данных уравнений следует, что $x > 0$ и $y > 0$.

Возведем каждое из уравнений в квадрат:

$$\begin{cases} x^2(1 - y^2) = a^2, \\ y^2(1 - x^2) = b^2. \end{cases}$$

В результате могут быть приобретены только такие посторонние решения, при которых либо $x < 0$, либо $y < 0$.

Выражения $1 - y^2$ и $1 - x^2$, как это видно из последней системы, останутся положительными.

Мы получили систему относительно $x^2 = u$ и $y^2 = v$:

$$\begin{cases} u(1-v) = a^2, \\ v(1-u) = b^2. \end{cases}$$

Чтобы эта система была равносильна предыдущей (при замене неизвестных равносильность может быть нарушена), достаточно потребовать выполнения неравенств

$$\begin{cases} u > 0, \\ v > 0 \end{cases}$$

Раскрыв в последней системе уравнений скобки, получим

$$\begin{cases} u - uv = a^2, \\ v - uv = b^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем

$$u - v = a^2 - b^2,$$

т. е. $u = v + a^2 - b^2$. Подставим в первое уравнение последней системы, получим квадратное уравнение относительно v :

$$v^2 + (a^2 - b^2 - 1)v + b^2 = 0,$$

откуда

$$v_{1,2} = \frac{1}{2} (1 - a^2 + b^2 \pm \sqrt{(1 - a^2 + b^2)^2 - 4b^2}).$$

Вычисляем u :

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} (1 + a^2 - b^2 \pm \sqrt{(1 - a^2 + b^2)^2 - 4b^2}).$$

(У u и v , входящих в одно решение, берутся одноименные знаки.)

Подкоренное выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} (1 - a^2 + b^2)^2 - 4b^2 &= (1 - a^2 + b^2 - 2b)(1 - a^2 + b^2 + 2b) = \\ &= [(1 - b)^2 - a^2][(1 + b)^2 - a^2] = \\ &= (1 - b - a)(1 - b + a)(1 + b - a)(1 + b + a). \end{aligned}$$

Так как $a > b > 0$ и $a + b < 1$, то каждый из четырех множителей положителен и дискриминант тоже положителен.

Если перед корнем выбран знак плюс, то u и v положительны. Докажем, что $v > 0$. Имеем: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) < a - b < a - b + 2b = a + b < 1$. Следовательно, $1 - a^2 + b^2 > 0$ и, обращаясь к выражению для v , находим, что $v > 0$. Так как $a > b$, то очевидно, что и $u > 0$.

Если перед корнем выбран знак минус, то нужно проверить, что u и v положительны. Так как $a > b$, то проверку достаточно провести для v , которое меньше u .

Неравенство

$$1 - a^2 + b^2 > \sqrt{(1 - a^2 + b^2)^2 - 4b^2}$$

очевидно.

Нетрудно проследить, что в процессе решения системы уравнений относительно u и v при условии, что u и v положительны, мы не нарушали равносильности.

Второй способ. Эту систему естественно было бы решать с помощью подстановки $x = \sin \varphi$, $y = \sin \psi$, где $0 < \varphi < \pi/2$, $0 < \psi < \pi/2$. Такая подстановка возможна, поскольку из имеющихся в условии ограничений легко получить, что $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Получим систему

$$\begin{cases} \sin \varphi \cos \psi = a, \\ \sin \psi \cos \varphi = b. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения этой системы, найдем

$$\begin{cases} \sin(\varphi + \psi) = a + b, \\ \sin(\varphi - \psi) = a - b. \end{cases}$$

Так как по условию $0 < a + b < 1$ и $0 < a - b < 1$, а на φ и ψ были наложены ограничения $0 < \varphi < \pi/2$, $0 < \psi < \pi/2$, то можно написать

$$\begin{cases} \varphi + \psi = \arcsin(a + b), \\ \varphi - \psi = \arcsin(a - b) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi + \psi = \pi - \arcsin(a + b), \\ \varphi - \psi = \arcsin(a - b). \end{cases}$$

Из первой системы получим

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2} [\arcsin(a+b) + \arcsin(a-b)], \\ \psi_1 = \frac{1}{2} [\arcsin(a+b) - \arcsin(a-b)]. \end{cases}$$

Найдем $\sin \varphi_1$ и $\sin \psi_1$:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2} [1 - \cos(\alpha + \beta)]} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}, \end{aligned}$$

где $\alpha = \arcsin(a+b)$, $\beta = \arcsin(a-b)$. (При выборе знаков перед корнями мы здесь и в дальнейшем принимаем во внимание ограничения на φ и ψ : $0 < \varphi < \pi/2$, $0 < \psi < \pi/2$.) Продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - (a+b)^2} \sqrt{1 - (a-b)^2} + (a+b)(a-b)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + a^2 - b^2 - \sqrt{[1 - (a+b)^2][1 - (a-b)^2]}}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$[1 - (a+b)^2][1 - (a-b)^2] = (1 - a^2 + b^2)^2 - 4b^2.$$

Аналогично найдем $\sin \psi_1$, а также $\sin \varphi_2$ и $\sin \psi_2$.

Ответ. Если $a > b > 0$, $a+b < 1$, то система имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + a^2 - b^2 - \sqrt{(1 - a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}, \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - a^2 + b^2 - \sqrt{(1 - a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + a^2 - b^2 + \sqrt{(1 - a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - a^2 + b^2 + \sqrt{(1 - a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}. \end{cases}$$

9.30. Наряду с решением x_1, y_1, z_1 система обязательно имеет решение $-x_1, -y_1, z_1$. Поэтому у системы будет единственное решение только в том случае, когда $x=y=0$.

Подставляя $x=y=0$ в исходную систему, получим

$$\begin{cases} z=a, \\ z=b, \\ z^2=4, \end{cases}$$

откуда либо $a=b=2$, либо $a=b=-2$.

Проверим, действительно ли при найденных значениях a и b система имеет единственное решение.

Если $a=b=2$, то из первого уравнения находим

$$xyz=2-z.$$

Подставляя во второе, получим квадратное уравнение относительно z :

$$z^2-3z+2=0,$$

корни которого $z_1=1$, $z_2=2$.

При $z=1$ получим систему

$$\begin{cases} xy=1, \\ x^2+y^2=3, \end{cases}$$

которая, как легко проверить, имеет четыре решения.

Таким образом, значения параметров $a=b=2$ не удовлетворяют условию задачи.

Если $a=b=-2$, то из первого уравнения найдем

$$xyz=-2-z.$$

Подставляем во второе:

$$z^2+z-2=0,$$

откуда $z_1=-2$, $z_2=1$.

При $z=-2$ приходим к системе

$$\begin{cases} xy=0, \\ x^2+y^2=0, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $x=y=0$. При $z=1$ получаем систему

$$\begin{cases} xy=-3, \\ x^2+y^2=3. \end{cases}$$

Подставляем во второе уравнение $y = -\frac{3}{x}$ и убеждаемся, что уравнение $x^4 - 3x^2 + 9 = 0$, которое получается в результате, имеет только мнимые корни.

Ответ. $a = b = -2$.

9.31. По условию $y = -x$. Данные уравнения примут вид

$$\begin{cases} x^3(1+a) = \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3(2-a) = 1. \end{cases}$$

Если $a \neq -1$, то, найдя x^3 из первого и второго уравнений, приравняем полученные выражения

$$\frac{1}{2}(a+1) = \frac{1}{2-a}, \text{ т. е. } a^2 - a = 0,$$

откуда $a = 0$ или $a = 1$.

Условию задачи могут удовлетворить только три значения параметра a :

$$-1, 0, 1,$$

которые нужно проверить.

Если $a = -1$, то из первого уравнения найдем $y = -x$, а из второго уравнения найдем $x^3 = \frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, а следовательно, $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Найденные значения неизвестных удовлетворяют и условию $x + y = 0$.

Если $a = 0$, то из первого уравнения: $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, а из второго: $y = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Это значит, что при $a = 0$ система имеет два решения:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}. \end{cases}$$

По условию любое решение должно удовлетворять требованию $x + y = 0$, между тем первое решение этому требованию не удовлетворяет. Значение $a = 0$ мы должны отбросить.

Осталось рассмотреть случай, когда $a=1$. В этом случае получим систему

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 2, \\ x^3 + x^2y + xy^2 = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 2, \\ x(x^2 + xy + y^2) = 1. \end{cases}$$

Так как правые части $\neq 0$, то разделим первое уравнение на второе, откуда $x+y=0$. Поскольку условие $x+y=0$ теперь автоматически выполняется для любого решения системы, то нужно убедиться, что у этой системы есть хотя бы одно решение. Легко увидеть, что таким решением является $x=1, y=-1$.

Ответ. ± 1 .

9.32. Так как система должна иметь хотя бы одно решение при любом b , то она должна иметь решение и при $b=0$. Положив $b=0$, получим систему

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a = 1, \\ a + x^2y = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение удовлетворяется либо при $a=0$ и любом x , либо при $x=0$. Если $x=0$, то из второго уравнения получаем $a=1$. Итак, возможны только два значения: $a=0$ и $a=1$.

При $a=0$ получаем систему

$$\begin{cases} (b^2 + 1)^y = 1, \\ bxy + x^2y = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет решение при любом b , только если $y=0$. Однако это значение y не удовлетворяет второму уравнению.

Остается рассмотреть случай $a=1$. Система примет вид

$$\begin{cases} x^2 + (b^2 + 1)^y = 1, \\ bxy + x^2y = 0. \end{cases}$$

При любом b эта система имеет решение $x=y=0$.

Ответ. 1.

9.33. Наряду с решением $x = x_1$, $y = y_1$ система обязательно имеет решение $x = -x_1$, $y = y_1$. Чтобы у системы было только одно решение, эти два решения должны совпасть, т. е. $x_1 = -x_1 = 0$. Подставляя в данную систему $x = 0$, $y = y_1$, получим систему уравнений относительно y_1 и a :

$$\begin{cases} y_1 + a = 1, \\ y_1^2 = 1. \end{cases}$$

Исключив из нее y_1 , найдем $(1-a)^2 = 1$, т. е. $a_1 = 0$, $a_2 = 2$. Если $a = 0$, то приходим к системе

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Нужно выяснить, есть ли у этой системы решение, отличное от $x = 0$, $y = 1$. Достаточно рассмотреть случай $x > 0$, так как при $x < 0$ в силу «четности» ответ будет аналогичным.

В силу уравнения $x^2 + y^2 = 1$ неизвестные x и y не превосходят единицы. Если $x > 0$, т. е. $0 < x \leq 1$, то $x^2 \leq x$ и $-x^2 + x \geq 0$. Учитывая последнее соотношение для первого уравнения

$$y = 2^x - x^2 + x,$$

обнаружим, что $y > 1$.

Так как раньше мы получили, что $y \leq 1$, то получаем противоречие и, следовательно, $x > 0$ не может входить в решение системы.

Мы доказали, что при $a = 0$ данная система имеет единственное решение.

Пусть теперь $a = 2$. При $x \geq 0$ получим систему

$$\begin{cases} y = 2^x - x^2 + x - 2, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

у которой наряду с решением $x = 0$, $y = -1$ есть решение $x = 1$, $y = 0$.

Следовательно, из двух значений, найденных для a , подходит только одно.

Ответ. 0.

9.34. Умножим числитель и знаменатель дроби из второго уравнения на $\sqrt{x^2+1}-x$. Полученное уравнение разделим на y , который тоже отличен от нуля, если входит в решение системы. Получим

$$\frac{x}{y} + \sqrt{x^2+1} - x + y = 0.$$

Исключим $\sqrt{x^2+1}$ с помощью первого уравнения системы:

$$\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + y^2 + 2x - 2y = 3.$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{x^2}{y^2} + 2x + y^2 - 2\left(\frac{x}{y} + y\right) = 3.$$

Если $\frac{x}{y} + y = z$, то

$$z^2 - 2z - 3 = 0, \quad z_1 = -1, \quad z_2 = 3.$$

Первое уравнение данной системы можно записать в виде

$$\left(\frac{x^2}{y^2} + 2x + y^2\right) - 2x + 2\sqrt{x^2+1} = 3,$$

т. е.

$$\sqrt{z^2 - 2z + 2\sqrt{x^2+1}} = 3.$$

Если $z = -1$, то $\sqrt{x^2+1} = 1 + x$, откуда $x = 0$. Второе уравнение системы дает тогда два значения: $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, где $y = 0$ не удовлетворяет первому уравнению. Если $z = 3$, то $x = \frac{4}{3}$; второе уравнение системы после несложных преобразований принимает вид $3y^2 + y + 4 = 0$, т. е. не имеет действительных решений.

Проверка убеждает нас в том, что $x = 0$, $y = -1$ — единственное решение системы.

Ответ. $(0, -)$.

Глава 10

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Ответы к упражнениям

1. Получим совокупность неравенств, имеющую те же самые решения.

2. Получим систему неравенств, не имеющую решений.

3. Ответ: $-1 < x \leq 1$, $5 < x \leq 7$, $x > 8$.

4. Вначале нужно переписать неравенство в виде

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)(x-3)(x-4)^2 \leq 0,$$

Последний множитель говорит, что точка 4 обязательно должна принадлежать множеству решений, этим его влияние ограничивается.

Ответ. $\frac{5}{2} \leq x \leq 3$, $x = 4$.

5. Поскольку неравенство строгое, то множители, стоящие в знаменателе, и множители, стоящие в числителе, играют одинаковую роль. Данное неравенство равносильно такому:

$$(x+3)^2(x+1)(x-4)^2(x-2)(x-5) < 0.$$

Достаточно решить неравенство

$$(x+1)(x-2)(x-5) < 0$$

и исключить, если они попали в множество решений, точки $x = -3$, $x = 4$.

Ответ. $x < -3$, $-3 < x < -1$, $2 < x < 4$, $4 < x < 5$.

6. $0 \leq ax^2 + bx + c < 9$.

7. $ax^2 + bx + c \geq 9$; здесь не нужно заботиться о знаке подкоренного выражения, так как после возведения в квадрат получаем неравенство, из которого следует, что это выражение положительно.

8.

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \leq (dx + e)^2, \\ ax^2 + bx + c \geq 0, \\ dx + e \geq 0 \end{cases}$$

(см. пример 4 на стр. 50).

9. Нужно разобрать два случая в зависимости от знака правой части: если правая часть отрицательна, но неравенство удовлетворяется при всех x , при которых левая часть существует; если правая часть неотрицательна, то обе части неравенства нужно возвести в квадрат (подкоренное выражение при этом не может стать отрицательным):

$$\begin{cases} dx + e < 0, \\ ax^2 + bx + c \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} dx + e \geq 0, \\ ax^2 + bx + c > (dx + e)^2. \end{cases}$$

10.1. Обозначим $a = 1 + k$. Тогда из условия $a + b = 2$ получим $b = 1 - k$. Вычислим $a^4 + b^4$:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (1 + k)^4 + (1 - k)^4 = 2k^4 + 12k^2 + 2 = \\ &= 2(k^4 + 6k^2 + 1) \geq 2, \end{aligned}$$

так как $k^4 + 6k^2 \geq 0$ и, следовательно, $k^4 + 6k^2 + 1 \geq 1$.

10.2. Первый способ. Пусть $x = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$. Тогда $x + y = \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. Так как

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \leq 1, \text{ то } -\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}.$$

Второй способ. Сравним данное равенство $x^2 + y^2 = 1$ с очевидным неравенством $x^2 + y^2 \geq 2xy$, обнаружим, что $2xy \leq 1$. Сложим последнее неравенство с равенством $x^2 + y^2 = 1$:

$$(x + y)^2 \leq 2,$$

т. е. $-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}$.

10.3. Первый способ.

$$c^{2/3} = \frac{a}{c^{1/3}} + \frac{b}{c^{1/3}} < \frac{a}{a^{1/3}} + \frac{b}{b^{1/3}} = a^{2/3} + b^{2/3}.$$

Второй способ. Неравенству $a^{2/3} + b^{2/3} > c^{2/3}$ эквивалентно неравенство

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{2/3} + \left(\frac{b}{c}\right)^{2/3} > 1.$$

Так как $b < c$ и $a < c$, то основания показательных функций $\left(\frac{a}{c}\right)^x$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^x$ меньше единицы и эти функции убывают.

Следовательно,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{2/3} + \left(\frac{b}{c}\right)^{2/3} > \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1.$$

10.4. Данное неравенство можно переписать так:

$$4x^3 - 4x^2 + 1 \geq 0.$$

Оценим левую часть:

$$4x^3(x - 1) + 1 = -4x^2(1 - x) + 1.$$

Так как $0 \leq x \leq 1$, то $x^2 \leq x$ и $1 - x \geq 0$. Следовательно,
 $-4x^2(1-x) + 1 \geq -4x(1-x) + 1 = (2x-1)^2 \geq 0$,

что и доказывает наше неравенство.

10.5. Каждый из входящих в неравенство корней оценим следующим образом:

$$\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1) \cdot 1} \leq \frac{(4a+1)+1}{2} = 2a+1.$$

Складывая полученные неравенства, придем к выводу, что

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 2(a+b+c) + 3 = 5.$$

Теперь, чтобы доказать написанное в условии неравенство, остается убедиться, что в последней оценке равенство никогда не достигается. Равенство возможно лишь при одновременном выполнении равенств $4a+1=1$, $4b+1=1$, $4c+1=1$, т. е. при $a=b=c=0$, что противоречит условию $a+b+c=1$.

Итак,

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5.$$

10.6. Пусть $b \leq a$. Тогда

$$(a+b)^n \leq (2a)^n = 2^n a^n < 2^n (a^n + b^n).$$

10.7. Пусть $a \leq b$ и $b > 0$. Тогда по свойству показательной функции

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \leq \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

если $m \geq n$. Прибавим к обеим частям неравенства по единице и возведем в степень $1/m$:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m + 1\right]^{1/m} \leq \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right]^{1/m}$$

Так как $m \geq n$, то $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$ и по свойству показательной функции с основанием, большим единицы:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right]^{1/m} \leq \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right]^{1/n}.$$

Следовательно,

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m + 1\right]^{1/m} \leq \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right]^{1/n}.$$

Умножая обе части неравенства на число $b > 0$, получим

$$(a^m + b^m)^{1/m} \leq (a^n + b^n)^{1/n}.$$

Осталось рассмотреть случай $b = 0$. В этом случае неравенство обращается в очевидное равенство.

10.8. Имеем n очевидных неравенств:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 \cdot n} &< \frac{1+n}{2}, \\ \sqrt{2(n-1)} &\leq \frac{1+n}{2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \sqrt{(n-1)2} &\leq \frac{1+n}{2}, \\ \sqrt{n \cdot 1} &< \frac{1+n}{2}. \end{aligned}$$

Первое и последнее неравенства обязательно будут строгими, так как по условию $n > 1$. Перемножая эти неравенства, получим

$$\sqrt{(n!)}^2 < \left(\frac{1+n}{2}\right)^n, \text{ т. е. } n! < \left(\frac{1+n}{2}\right)^n.$$

10.9. Первый способ. Обозначим $\frac{a}{b} = u$, $\frac{b}{c} = v$,

$\frac{c}{a} = w$. Тогда $uvw = 1$, т. е. среди чисел u , v и w есть хотя бы одно, большее 1, и одно, меньшее 1 ($u = v = w$ невозможно, так как a , b и c не равны друг другу). Пусть $u > 1$, а $0 < v < 1$, т. е.

$$(1-u)(v-1) > 0 \text{ или } -uv + u + v - 1 > 0.$$

С другой стороны, для чисел u , v и w выполняется неравенство

$$\frac{uv+w}{2} \geq \sqrt{uvw} = 1,$$

т. е. $uv + w \geq 2$. Складывая это неравенство с неравенством $-uv + u + v - 1 > 0$, получим

$$u + v + w > 3,$$

или

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > 3.$$

Второй способ. Пусть u , v и w — положительные числа, причем w — наименьшее из них: $u > w$, $v > w$. Так как $u - w$ — положительное число, то на него можно умножить неравенство $v > w$:

$$v(u - w) > w(u - w),$$

т. е.

$$uv - vw + w^2 > uw.$$

Поделим последнее неравенство на uw :

$$\frac{v}{w} - \frac{v}{u} + \frac{w}{u} > 1.$$

С другой стороны,

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2.$$

Складывая с предыдущим неравенством, получим

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{w} + \frac{w}{u} > 3.$$

Если c — наименьшее из чисел a , b и c , то полагаем $w = c$, $u = a$, $v = b$ и получаем неравенство, которое требовалось доказать. Если a или b — наименьшее из чисел a , b и c , то обозначения соответственно изменятся.

10.10. Предположим противное, т. е. что

$$(a \cdot 2^x + b \cdot 3^y + 1)^2 > (4^x + 9^y + 1)(a^2 + b^2 + 1).$$

Раскроем скобки, перенесем все члены в правую часть и приведем подобные:

$$4^x b^2 + 4^x + 9^y a^2 + 9^y + a^2 + b^2 - 2ab \cdot 2^x \cdot 3^y - 2a \cdot 2^x - \\ - 2b \cdot 3^y < 0,$$

или

$$(b \cdot 2^x - a \cdot 3^y)^2 + (2^x - a)^2 + (3^y - b)^2 < 0,$$

что невозможно.

10.11. Оценим левую часть неравенства:

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 = \\ = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10 = \\ = [(x^2 - 7x + 9) - 3][(x^2 - 7x + 9) + 3] + 10 = \\ = (x^2 - 7x + 9)^2 - 9 + 10 = (x^2 - 7x + 9)^2 + 1 \geq 1.$$

10.12. Подставляя в первое уравнение x^2 вместо yz , преобразуем систему следующим образом:

$$\begin{cases} y + z = x^3 - x, \\ yz = x^2. \end{cases}$$

Числа y и z являются корнями квадратного уравнения относительно u :

$$u^2 + (x - x^3)u + x^2 = 0.$$

По условию числа y и z действительны. Следовательно, дискриминант $D = (x - x^3)^2 - 4x^2 = x^2(1 - x^2)^2 - 4x^2 = x^2[(1 - x^2)^2 - 4]$ должен быть неотрицательным.

Так как по условию $x \neq 0$, то

$$(1 - x^2)^2 \geq 4.$$

Это неравенство может выполняться, если либо $1 - x^2 \leq -2$, либо $1 - x^2 \geq 2$. Второе неравенство не имеет решений, а из первого получаем $x^2 \geq 3$, что и требовалось доказать.

10.13. Перепишем данные уравнения в виде

$$\begin{cases} y + z = 5 - x, \\ yz + x(z + y) = 8, \end{cases}$$

откуда

$$yz = 8 - x(5 - x).$$

Числа y и z будут корнями уравнения

$$u^2 - (5 - x)u + x^2 - 5x + 8 = 0.$$

Так как y и z должны быть действительными числами, то дискриминант этого уравнения не может стать отрицательным ни при каких значениях x :

$$(5 - x)^2 - 4(x^2 - 5x + 8) \geq 0,$$

т. е.

$$-3x^2 + 10x - 7 \geq 0,$$

откуда

$$1 \leq x \leq \frac{7}{3}.$$

Так как уравнения, которым удовлетворяют x , y и z , симметричны, то аналогичные ограничения получим

для y и z :

$$1 \leq y \leq \frac{7}{3}, \quad 1 \leq z \leq \frac{7}{3},$$

что и требовалось доказать.

10.14. Дискриминант квадратного трехчлена равен $1 - 4a$. Если $a < \frac{1}{4}$, то дискриминант положителен и уравнение $ax^2 + x + 1 = 0$ имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}.$$

Когда $a > 0$, т. е. $0 < a < \frac{1}{4}$, то получим решения неравенства:

$$x < x_1, \quad x > x_2.$$

Когда $a < 0$, то легко проверить, что $x_2 < x_1$. Поэтому решения запишутся в виде

$$x_2 < x < x_1.$$

Дискриминант отрицателен, когда $a > \frac{1}{4}$, а следовательно, $a > 0$. Неравенство удовлетворяется при всех x .

Если $a = \frac{1}{4}$, то решения неравенства запишутся в виде $x \neq -2$.

10.15. Условия задачи выполняются тогда и только тогда, когда интервал $1 < x < 2$ будет расположен между корнями параболы, т. е. если

$$\begin{cases} f(1) \leq 0, \\ f(2) \leq 0. \end{cases}$$

Подставляя значения 1 и 2 в данный трехчлен, получим систему двух квадратных неравенств

$$\begin{cases} m^2 + 7m + 1 \leq 0, \\ m^2 + 8m + 4 \leq 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство, найдем

$$\frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2},$$

а решая второе, получим

$$-4 - 2\sqrt{3} \leq m \leq -4 + 2\sqrt{3}.$$

Ответ. $-\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}) \leq m \leq -4 + 2\sqrt{3}.$

10.16. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 x_2 = a. \end{cases}$$

Если корни x_1 и x_2 действительны, то из первой формулы следует, что они не могут быть оба положительными. Если оба корня отрицательны, то из второй формулы находим $a > 0$, а следовательно, корни x_1 и x_2 меньше a . Если $a = 0$, то один из корней равен -1 , и условие задачи снова не выполняется. Таким образом, $a < 0$. При $a < 0$, дискриминант $1 - 4a$ положителен и оба корня действительные. Потребуем, чтобы меньший из них был больше a , т. е.

$$\frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} > a.$$

Это неравенство эквивалентно такому:

$$\sqrt{1 - 4a} < -2a - 1.$$

Возведя обе части неравенства в квадрат, мы должны позаботиться о сохранении связей, которые неявно присутствуют в этом неравенстве:

$$\begin{cases} 1 - 4a < (1 + 2a)^2, \\ 1 + 2a < 0, \\ 1 - 4a \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство выполняется, так как мы установили, что $a < 0$.

Первые два преобразуются к виду

$$\begin{cases} a(a + 2) > 0, \\ a < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ. $a < -2$.

10.17. Так как $k \neq 0$, то ветви параболы направлены вверх. Внутри интервала от -1 до $+1$ парабола имеет

только один корень тогда и только тогда, когда на концах этого интервала трехчлен имеет разные знаки, т. е.

$$(k^2 - k - 2)(k^2 + k - 2) < 0.$$

Разлагая каждый из трехчленов на множители, получим

$$(k-2)(k+1)(k+2)(k-1) < 0.$$

Ответ. — $2 < k < -1$; $1 < k < 2$.

10.18. Условие, что ветви параболы направлены вверх, означает, что $m > 0$. Если парабола не пересекает ось Ox , то получаем систему

$$\begin{cases} m > 0, \\ D = 4 - m(3m + 1) < 0. \end{cases}$$

Если же данный квадратный трехчлен имеет действительные корни, то больший корень не должен быть положительным:

$$\begin{cases} m > 0, \\ \frac{2 + \sqrt{4 - m(3m + 1)}}{m} \leq 0. \end{cases}$$

Второе неравенство второй системы (а следовательно, и вся система) не имеет решений, при $m > 0$, так как числитель и знаменатель оказываются положительными.

Решая второе неравенство первой системы, найдем

$$m < -1\frac{1}{3}, \quad m > 1.$$

Принимая во внимание первое неравенство, находим решение системы: $m > 1$.

Пусть теперь $m = 0$. Правая часть данного неравенства принимает вид $-4x + 1 > 0$, т. е. $x < \frac{1}{4}$, и неравенство удовлетворяется не при всех положительных x .

Ответ. $m > 1$.

10.19. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3 < 3x - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 < 3x - 3. \end{cases}$$

Решая каждое из четырех неравенств, придем к новой совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \leq -1, & x \geq 3, \\ 0 < x < 5. \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 3, \\ x < -3, & x > 2. \end{cases}$$

Итак, $3 \leq x < 5$, $2 < x < 3$.

Ответ. $2 < x < 5$.

10.20. Неравенство можно переписать в виде

$$\sqrt{(x-3)^2} > \sqrt{(x+2)^2}$$

или

$$(x-3)^2 > (x+2)^2,$$

откуда после возведения в квадрат и приведения подобных получим линейное неравенство.

Ответ. $x < \frac{1}{2}$.

10.21. При $x > 0$ неравенство можно переписать в виде

$$1 - \sqrt{8x-3} \geq 4x \quad \text{или} \quad \sqrt{8x-3} \leq 1 - 4x.$$

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 8x-3 \leq (1-4x)^2, \\ 1-4x \geq 0, \\ 8x-3 \geq 0, \end{cases}$$

которая несовместна, так как несовместны два последних неравенства.

При $x \leq 0$ входящее в данное неравенство выражение $\sqrt{8x-3}$ не существует.

Ответ. Неравенство не имеет решений.

10.22. Данное неравенство можно переписать так:

$$\frac{1-3x-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 0.$$

Получаем совокупность двух систем

$$\begin{cases} x > 0, \\ 1-3x-\sqrt{1-4x^2} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ 1-3x-\sqrt{1-4x^2} > 0. \end{cases}$$

Решаем первую систему:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{1-4x^2} > 1-3x. \end{cases}$$

Если правая часть второго неравенства отрицательна ($x > 1/3$), то неравенству будут удовлетворять все x , при которых подкоренное выражение неотрицательно ($x^2 \leq 1/4$, $|x| \leq 1/2$). Получаем интервал решений $1/3 < x \leq 1/2$.

Если правая часть второго неравенства неотрицательна ($x \leq 1/3$), то второе неравенство можно возвести в квадрат, дополнив систему условием $1-4x^2 \geq 0$ или $|x| \leq 1/2$. После простых преобразований получим

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1/3, \\ |x| \leq 1/2, \\ 13x^2 - 6x < 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 0 < x \leq 1/3, \\ 0 < x < 6/13, \end{cases}$$

откуда $0 < x \leq 1/3$. Объединяя интервалы $0 < x \leq 1/3$ и $1/3 < x \leq 1/2$, получим решение первой системы: $0 < x \leq 1/2$.

Перейдем ко второй системе:

$$\begin{cases} x < 0, \\ \sqrt{1-4x^2} < 1-3x. \end{cases}$$

Условие $x < 0$ обеспечивает положительность правой части второго неравенства. Возведем второе неравенство в квадрат, учитывая, что $|x| \leq 1/2$. Получим

$$\begin{cases} x < 0, \\ x(x-6/13) > 0, \\ -1/2 \leq x \leq 1/2. \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad -1/2 \leq x < 0,$$

Ответ. $-1/2 \leq x < 0$, $0 < x \leq 1/2$.

10.23. Перепишем данное неравенство в виде

$$\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - \frac{x-1}{x} > 0.$$

Так как в неравенство входит выражение $\sqrt{\frac{x-1}{x}}$, то $\frac{x-1}{x} \geq 0$, а потому $\frac{x-1}{x} = \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2$ (напишите для себя,

как выглядело бы это равенство при $\frac{x-1}{x} < 0$). Вынесем множитель $\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ за скобки:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} \left(\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) > 0.$$

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Возведем первое неравенство системы в квадрат. При этом следует добавить условие, в силу которого выражение, «освободившееся» от влияния радикала, должно быть неотрицательным:

$$\begin{cases} \frac{x^2-x+1}{x} > 2 \sqrt{\frac{x-1}{x}}, \\ x \geq -1, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Так как $x^2-x+1 > 0$ при всех x , то первому неравенству системы могут удовлетворять только $x > 0$, ибо выражение справа всегда положительно. Следовательно, систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x^2-x+1 > 2 \sqrt{x(x-1)}, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Обозначим $\sqrt{x(x-1)} = y$, тогда первое неравенство примет вид $y^2-2y+1 > 0$, т. е. $(y-1)^2 > 0$, откуда $y \neq 1$. Итак,

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-x} \neq 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x^2-x-1 \neq 0, \\ x(x-1) > 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна такой:

$$\begin{cases} x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$

Ответ. $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

10.24. При $x > 0$ правая часть неравенства положительна, так как в этом случае $\sqrt{1+2x} > 1$. Возведем обе части неравенства в квадрат; получим систему

$$\begin{cases} x > 0, \\ \frac{2x^2}{2x+9} < 1+x-\sqrt{1+2x}, \\ 2x+9 > 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство системы — следствие того, что $x > 0$. Перенесем во втором неравенстве $1+x$ в левую часть и произведем некоторые упрощения. Получим систему

$$\begin{cases} x > 0, \\ \frac{11x+9}{2x+9} > \sqrt{1+2x}. \end{cases}$$

Так как $x > 0$, то второе неравенство можно возвести в квадрат, не добавляя при этом никаких ограничений (убедитесь в этом самостоятельно):

$$\frac{121x^2+198x+81}{4x^2+36x+81} > 1+2x.$$

Умножим неравенство на знаменатель, который при $x \neq -9/2$ положителен; после приведения подобных получим систему

$$\begin{cases} x > 0, \\ -8x^3+45x^2 > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 0, \\ x < \frac{45}{8}. \end{cases}$$

Итак, в первом случае неравенство имеет решения: $0 < x < \frac{45}{8}.$

При $x=0$ данное неравенство не удовлетворяется.

Если же $x < 0$, то, умножив обе части на -1 , придем к неравенству

$$\frac{2 \cdot (-x)}{\sqrt{2x+9}} > 1 - \sqrt{1+2x}.$$

Проделав с этим неравенством преобразования, аналогичные случаю, когда $x > 0$, придем к выводу, что $x > \frac{45}{8}$. Это противоречит нашему предположению об отрицательности x .

Ответ. $0 < x < \frac{45}{8}$.

10.25. Перепишем данное неравенство в виде

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + x + 2\sqrt{x}\sqrt{x+7} + (x+7) < 42,$$

т. е.

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x+7})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{x+7}) - 42 < 0.$$

Обозначив выражение, стоящее в скобках, через y , получим квадратное неравенство

$$y^2 + y - 42 < 0,$$

которое имеет решения: $-7 < y < 6$. Итак,

$$-7 < \sqrt{x} + \sqrt{x+7} < 6.$$

Поскольку сумма $\sqrt{x} + \sqrt{x+7}$ всегда положительна, то достаточно решить лишь правое неравенство:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} < 6.$$

После возведения в квадрат получим неравенство

$$2\sqrt{x}\sqrt{x+7} < 29 - 2x,$$

равносильное исходному, так как корни $\sqrt{x}$ и $\sqrt{x+7}$ здесь не устранены, (Заметьте, что заменив выражение

$\sqrt{x}\sqrt{x+7}$ на $\sqrt{x(x+7)}$ мы могли нарушить равносильность). После второго возведения в квадрат приходим к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^2 + 28x < 841 - 116x + 4x^2, \\ 29 - 2x > 0, \\ x \geq 0, \\ x + 7 \geq 0, \end{array} \right. \quad \text{т. е.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{841}{144}, \\ x < \frac{29}{2}, \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

Ответ. $0 \leq x < \frac{841}{144}$.

10.26. Неравенство удобно переписать в виде

$$\sqrt{a^2 - x^2} > -2x.$$

Оно равносильно совокупности двух систем

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ a^2 - x^2 \geq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0, \\ a^2 - x^2 > 4x^2, \\ a^2 - x^2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Решая последнее неравенство каждой из систем, найдем $-|a| \leq x \leq |a|$.

Так как в первой системе $x > 0$, то для нее получим решения:

$$0 < x \leq |a|, \quad a \neq 0.$$

Перейдем ко второй системе. Решая второе неравенство, получим

$$-\frac{|a|}{\sqrt{5}} < x < \frac{|a|}{\sqrt{5}}.$$

Мы приходим к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 0, \\ -\frac{|a|}{\sqrt{5}} < x < \frac{|a|}{\sqrt{5}}, \\ -|a| \leq x \leq |a|, \end{array} \right.$$

решениями которой будут значения из интервала $-\frac{|a|}{\sqrt{5}} < x \leq 0$ при $a \neq 0$. Остается объединить решения двух систем.

Ответ. При $a \neq 0$: $-\frac{|a|}{\sqrt{5}} < x \leq |a|$; при $a = 0$ неравенство не имеет решений.

10.27. Приведем степени, входящие в данное неравенство, к основанию 2 и поделим на $2^{\sqrt{x}} 2^x$:

$$2^{x-\sqrt{x}} \leq 3 + 4 \cdot 2^{\sqrt{x}-x};$$

обозначив $2^{x-\sqrt{x}} = y$, получим

$$y \leq 3 + \frac{4}{y},$$

а так как $y > 0$, то

$$y^2 - 3y - 4 \leq 0.$$

Корни трехчлена: $-1, 4$; так как меньший корень отрицателен, то получаем

$$2^{x-\sqrt{x}} \leq 4,$$

т. е. $x - \sqrt{x} \leq 2$. Обозначим $\sqrt{x} = z$ и найдем решения неравенства

$$z^2 - z - 2 \leq 0.$$

Получим $-1 \leq z \leq 2$. Левое неравенство выполняется, если только $\sqrt{x}$ существует. Остается $\sqrt{x} \leq 2$, т. е. $0 \leq x \leq 4$.

Ответ. $0 \leq x \leq 4$.

10.28. Перепишем неравенство в виде

$$3^{\sqrt{x}} (3 + x - 2x^2) - 2(-2x^2 + x + 3) < 0,$$

или

$$(3^{\sqrt{x}} - 2)(-2x^2 + x + 3) < 0.$$

Последнее неравенство¹⁾ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 > 0, \\ -2x^2 + x + 3 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 < 0, \\ -2x^2 + x + 3 > 0. \end{cases}$$

¹⁾ Хотя метод интервалов был изложен во введении применительно к многочленам, им можно пользоваться при решении более широкого класса неравенств. В частности, для этого неравенства

Решая первую систему, получим

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}} > 2, \\ x < -1, \quad x > \frac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x > \log_3^2 2, \\ x < -1, \quad x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Так как $-1 < \log_3^2 2 < \log_3^2 3 = 1 < \frac{3}{2}$, то окончательно получим $x > \frac{3}{2}$.

Вторая система дает нам следующее:

$$\begin{cases} 0 \leq x < \log_3^2 2, \\ -1 < x < \frac{3}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда } 0 \leq x < \log_3^2 2.$$

Ответ. $0 \leq x < \log_3^2 2; \quad x > \frac{3}{2}$.

10.29. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{2x-1}{3-x} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{2x-1}{3-x} > 0. \end{cases}$$

Решениями первой системы будут: $x > 3$, а решениями второй: $\frac{1}{2} < x < 1$.

Ответ. $\frac{1}{2} < x < 1; \quad x > 3$.

получаем

$$(3^{\sqrt{x}} - 2)(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) > 0.$$

Первый множитель обращается в нуль при $x = \log_3^2 2$, причем он больше нуля при $x > \log_3^2 2$ и меньше нуля при $x < \log_3^2 2$. Нанесем точки -1 , $\log_3^2 2$ и $\frac{3}{2}$ на числовую ось и воспользуемся тем обстоятельством, что при $x > \frac{3}{2}$ все три скобки положительны. Так как, кроме того, $x \geq 0$, окончательно получим

$$0 \leq x < \log_3^2 2, \quad x > \frac{3}{2}.$$

10.30. Так как основание степеней, входящих в неравенство, меньше единицы, то

$$(x^0 - 2x^3 + 1)^{1/2} > 1 - x,$$

или

$$\begin{aligned} [(x^3 - 1)^2]^{1/2} &> 1 - x, \\ |x^3 - 1| &> 1 - x. \end{aligned}$$

Если $1 - x < 0$, то неравенство справедливо. Получаем первый интервал решений: $x > 1$. Если $x \leq 1$, то

$$1 - x^3 > 1 - x, \text{ т. е. } x^3 - x < 0,$$

или

$$x(x-1)(x+1) < 0.$$

Получаем еще два интервала решений:

$$x < -1, \quad 0 < x < 1.$$

Ответ. $x < -1$; $0 < x < 1$; $x > 1$.

10.31. Так как $x > 0$, то вместо неравенства

$$x \cdot x^{\log_a x} > a^2 x$$

можно написать

$$x^{\log_a x} > a^2.$$

Если $a > 1$, то при логарифмировании по основанию a знак неравенства не изменится:

$$(\log_a x)^2 > 2,$$

откуда $\log_a x < -\sqrt{2}$, $\log_a x > \sqrt{2}$, т. е. $0 < x < \frac{1}{a^{\sqrt{2}}}$,

$x > a^{\sqrt{2}}$.

Если $0 < a < 1$, то

$$(\log_a x)^2 < 2$$

и

$$-\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2},$$

т. е.

$$a^{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{a^{\sqrt{2}}}.$$

Ответ. При $0 < a < 1$, $a^{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{a^{\sqrt{2}}}$; при $a > 1$, $0 < x < \frac{1}{a^{\sqrt{2}}}$, $x > a^{\sqrt{2}}$.

10.32. Прологарифмируем по основанию 10 и обозначим $\lg x = y$. Получим неравенство

$$y^3 - 3y^2 + y - 3 > 0.$$

Левую часть разложим на множители:

$$y(y^2 + 1) - 3(y^2 + 1) = (y^2 + 1)(y - 3).$$

Полученное произведение будет положительно, если $y > 3$, т. е. $\lg x > 3$.

Ответ. $x > 1000$.

10.33. Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$0 \leq \log_2 \frac{3-2x}{1-x} < 1.$$

(Ограничение слева обеспечивает неотрицательность числа, стоявшего под знаком квадратного корня.)

Поскольку $0 = \log_2 1$, $1 = \log_2 2$ и основание логарифмов больше единицы, последнее неравенство можно записать так:

$$1 \leq \frac{3-2x}{1-x} < 2.$$

Требование положительности числа $\frac{3-2x}{1-x}$, которое могло быть нарушено при таком преобразовании, выполняется здесь автоматически.

Поскольку неравенство $1 \leq y < 2$ эквивалентно неравенству $\frac{y-1}{y-2} \leq 0$, получаем

$$\frac{\frac{3-2x}{1-x}-1}{\frac{3-2x}{1-x}-2} \leq 0, \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 2-x \leq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Ответ. $x \geq 2$.

10.34. Данное неравенство равносильно системе

$$0 < \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 1.$$

Тем самым мы обеспечили положительность числа, стоящего в условии под знаком логарифма. Левое неравенство можно заменить условием $x \neq 1$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 1, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Эту систему можно преобразовать так:

$$\begin{cases} |x-1| < |2x+1|, \\ x \neq -1/2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Входящее в эту систему неравенство можно возвести в квадрат, не нарушая его равносильности:

$$(x-1)^2 < (2x+1)^2,$$

т. е. $3x^2 + 6x > 0$, откуда $x < -2$, $x > 0$. Итак,

$$\begin{cases} x < -2, \quad x > 0, \\ x \neq -1/2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Ответ. $x < -2$, $0 < x < 1$, $x > 1$.

10.35. Перейдем к основанию 2 и прологарифмируем выражения $2x$ и $4x$:

$$\frac{1}{\log_2 x (1 + \log_2 x)} (2 + \log_2 x) > 1.$$

Обозначив $\log_2 x = y$, получим неравенство

$$\frac{2+y}{y(y+1)} > 1, \quad \text{или} \quad \frac{2-y^2}{y(y+1)} > 0.$$

Запишем последнее неравенство в более удобной форме

$$\frac{(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})}{y(y+1)} < 0;$$

его решениями будут два интервала:

$$-\sqrt{2} < y < -1, \quad 0 < y < \sqrt{2}.$$

Вспомнив, что $y = \log_2 x$, найдем x .

Ответ. $\frac{1}{2^{\sqrt{2}}} < x < \frac{1}{2}, \quad 1 < x < 2^{\sqrt{2}}.$

10.36. Так как $\log_{1/2} N = -\log_2 N$, то данное неравенство перепишем в виде

$$\log_2 (2^x - 1) \log_2 (2^{x+1} - 2) < 2.$$

Преобразуем второй сомножитель:

$$\log_2 (2^{x+1} - 2) = \log_2 [2(2^x - 1)] = 1 + \log_2 (2^x - 1).$$

Обозначив $\log_2 (2^x - 1) = y$, получим квадратное неравенство

$$y(y+1) < 2, \text{ или } y^2 + y - 2 < 0,$$

решения которого лежат в интервале

$$-2 < y < 1.$$

Вспомогая, чему равен y , получим

$$-2 < \log_2 (2^x - 1) < 1,$$

т. е.

$$1/4 < 2^x - 1 < 2, \quad 5/4 < 2^x < 3.$$

Ответ. $\log_2 5 - 2 < x < \log_2 3$.

10.37. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 1 > 2x - 5, \\ x^2 + 1 > 0, \\ 2x - 5 > 0. \end{cases}$$

Первое неравенство $x^2 - 2x + 6 > 0$ выполняется при любом x , так как дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, а коэффициент при x^2 положителен. Второе неравенство также всегда справедливо. Остается последнее неравенство, откуда $x > 5/2$.

Ответ. $x > 5/2$.

10.38. Обозначим $\log_a x = y$. Неравенство примет вид

$$\frac{1+y^2}{1+y} > 1.$$

Так как $1+y^2 > 0$, то и $1+y > 0$. Поэтому данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 1+y^2 > 1+y, \\ 1+y > 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} y(y-1) > 0, \\ y > -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y < 0, y > 1, \\ y > -1. \end{cases}$$

Получаем два интервала решений:

$$-1 < y < 0, \quad y > 1.$$

Так как $y = \log_a x$, то нужно рассмотреть два случая.

Во-первых, если $a > 1$, то $\log_a x$ — функция возрастающая и мы получим два интервала решений:

$$\frac{1}{a} < x < 1, \quad x > a.$$

Если же $0 < a < 1$, то получим другие два интервала решений:

$$1 < x < \frac{1}{a}, \quad 0 < x < a.$$

Ответ. При $a > 1$: $\frac{1}{a} < x < 1, x > a$; при $0 < a < 1$:
 $0 < x < a, \quad 1 < x < \frac{1}{a}.$

10.39. Перейдем к основанию k :

$$\frac{\log_k x}{\log_k kx} + \frac{\log_k (kx^2)}{\log_k x} > 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{y}{y+1} + \frac{1+2y}{y} > 0,$$

где $y = \log_k x$. Последнее неравенство можно переписать так:

$$\frac{3y^2 + 3y + 1}{y(y+1)} > 0.$$

Выражение, стоящее в числителе, всегда положительно. Поэтому решением неравенства будут два интервала:

$$y < -1, \quad y > 0.$$

Вспомня, что $y = \log_k x$ и $0 < k < 1$, найдем соответствующие интервалы для x .

Ответ. $0 < x < 1, \quad x > \frac{1}{k}.$

10.40. Поскольку $4^x - 6$ должно быть больше нуля, то $x > 1$. Следовательно, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} x > 1, \\ \log_2 (4^x - 6) > 0, \\ \log_2 (4^x - 6) \leq x. \end{cases}$$

Решая второе неравенство системы, найдем $x > \log_2 \sqrt{7}$.
Третье неравенство перепишем в виде системы

$$\begin{cases} 4^x - 6 \leq 2^x, \\ 4^x - 6 > 0; \end{cases}$$

решением которой будет интервал $\log_2 \sqrt{6} < x \leq \log_2 3$.
Так как $\log_2 \sqrt{7} > \log_2 \sqrt{6}$, то получим решение данного неравенства.

Ответ. $\log_2 \sqrt{7} < x \leq \log_2 3$.

10.41. Данное неравенство эквивалентно такому:

$$\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geq 1.$$

Знаменатель всегда положителен. Поэтому

$$|x^2 - 4x| + 3 \geq x^2 + |x - 5|,$$

остается раскрыть знаки абсолютной величины. Нанесем точки 0, 4, 5 на числовую ось и рассмотрим четыре случая.

Если $x < 0$, то получаем систему

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geq x^2 + 5 - x, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 0, \\ x \leq -2/3, \end{cases}$$

которой удовлетворяет полупрямая $x \leq -2/3$.

Если $0 \leq x \leq 4$, приходим к системе

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ 2x^2 - 5x + 2 \leq 0, \end{cases}$$

решением которой будет отрезок $1/2 \leq x \leq 2$.

Если $4 < x \leq 5$, то наше неравенство примет вид $x^2 - 4x + 3 \geq x^2 + 5 - x$, откуда $x \leq -2/3$. Это не удовлетворяет условию $4 < x \leq 5$, а потому в данном случае решений нет.

Остается случай $x > 5$. Раскрывая знаки абсолютных величин, получим $x \leq 8/5$. Здесь снова нет решений.

Ответ. $x \leq -2/3$; $1/2 \leq x \leq 2$.

10.42. Так как $x > 5/4$, то $x^2 > 1$ и данное неравенство равносильно такому:

$$\frac{4x - 5}{|x - 2|} \geq x.$$

Если $5/4 < x < 2$, то

$$4x - 5 \geq x(2 - x),$$

т. е.

$$x^2 + 2x - 5 \geq 0.$$

Корни трехчлена: $x_1 = -1 - \sqrt{6}$, $x_2 = -1 + \sqrt{6}$. Второй корень лежит в интервале от $5/4$ до 2 , поэтому получим интервал решений

$$\sqrt{6} - 1 \leq x < 2.$$

Если $x > 2$, придем к неравенству

$$4x - 5 \geq x(x - 2),$$

т. е. $x^2 - 6x + 5 \leq 0$, и получим второй интервал решений

$$2 < x \leq 5.$$

Ответ. $\sqrt{6} - 1 \leq x < 2$, $2 < x \leq 5$.

10.43. Перейдем в обеих частях неравенства к основанию 2:

$$\frac{\log_2 2x}{\log_2 x} \leq \sqrt{\frac{\log_2 (2x^3)}{\log_2 x}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1+y}{y} \leq \sqrt{\frac{1+3y}{y}},$$

где $y = \log_2 x$. Чтобы решить последнее неравенство, рассмотрим два случая. Если $\frac{1+y}{y} < 0$, то достаточно, чтобы подкоренное выражение не было отрицательным. Приходим к системе

$$\begin{cases} \frac{1+y}{y} < 0, \\ \frac{1+3y}{y} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < y < 0, \\ y \leq -\frac{1}{3}, \quad y \geq 0, \quad -1 < y \leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Если $\frac{1+y}{y} \geq 0$, то иррациональное неравенство относительно y нужно возвести в квадрат:

$$\begin{cases} \frac{1+y}{y} \geq 0, \\ \left(\frac{1+y}{y}\right)^2 \leq \frac{1+3y}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq -1, \quad y > 0, \\ \frac{2y^2 - y - 1}{y^2} \geq 0. \end{cases}$$

Решения последней системы лежат в интервалах

$$y \leq -1, \quad y \geq 1.$$

Таким образом, мы получаем три интервала изменения y :

$$y \leq -1, \quad -1 < y \leq -\frac{1}{3}, \quad y \geq 1,$$

которые объединяются в два: $y \leq -\frac{1}{3}, \quad y \geq 1$.

Вспоминая, что $y = \log_2 x$, найдем интервалы изменения x .

Отвѣт. $0 < x \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \quad x \geq 2.$

10.44. Так как $\log_{1/a} x = -\log_a x$, то перепишем неравенство следующим образом:

$$\log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1} < -\log_3 \left(\log_3 \frac{x+1}{x-1} \right).$$

Обозначив $\log_3 \frac{x+1}{x-1} = y$, получим

$$\log_2 y < 0,$$

откуда

$$0 < y < 1,$$

т. е.

$$0 < \log_3 \frac{x+1}{x-1} < 1,$$

а потому

$$1 < \frac{x+1}{x-1} < 3.$$

Последнее неравенство можно записать так:

$$\left(\frac{x+1}{x-1} - 1 \right) \left(\frac{x+1}{x-1} - 3 \right) < 0$$

(если некоторое выражение заключено между двумя числами, то разности между ним и каждым из этих чисел имеют разные знаки).

После выполнения действий в скобках и небольших упрощений получим

$$\frac{x-2}{(x-1)^2} > 0,$$

откуда $x > 2$.

Отвѣт. $x > 2$.

10.45. Если $0 < x^2 - 1 < 1$, то придем к системе

$$\begin{cases} 0 < x^2 - 1 < 1, \\ 3x - 1 > x^2, \\ x^2 > 0. \end{cases}$$

Так как последнее неравенство следует из первого, то получаем такую систему:

$$\begin{cases} 1 < x^2 < 2, \\ x^2 - 3x + 1 < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 < |x| < \sqrt{2}, \\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

откуда $1 < x < \sqrt{2}$.

Если $x^2 - 1 > 1$, т. е. $x^2 > 2$, то приходим ко второй системе:

$$\begin{cases} x^2 > 2, \\ x^2 - 3x + 1 > 0, \\ x > \frac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < -\sqrt{2}, \quad x > \sqrt{2}, \\ x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \\ x > \frac{1}{3}, \end{cases}$$

откуда $x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $1 < x < \sqrt{2}$, $x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

10.46. Так как

$$\log_{1/2}^2 \frac{x^5}{4} = (-5 \log_2 x + 2)^2 = 25 \log_2^2 x - 20 \log_2 x + 4,$$

то данное в условии неравенство примет вид

$$\log_2^4 x - 25 \log_2^2 x + 144 < 0,$$

откуда

$$9 < \log_2^2 x < 16, \quad \text{или} \quad 3 < |\log_2 x| < 4.$$

Остается решить совокупность двух неравенств

$$-4 < \log_2 x < -3, \quad 3 < \log_2 x < 4.$$

Ответ. $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{8}$; $8 < x < 16$.

10.47. Данное неравенство может выполняться только в том случае, если дискриминант стоящего в левой части квадратного трехчлена относительно x положителен, т. е.

$$\log_{0,5}^2 y^2 + 2 \log_{0,5} y^2 - 3 > 0.$$

Решением этого неравенства будут

$$\log_{0,5} y^2 < -3, \quad \log_{0,5} y^2 > 1.$$

В первом случае получим $y^2 > 8$, во втором $-0 < y^2 < 1/2$.

Ответ. $y < -\sqrt{8}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} < y < 0$, $0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y > \sqrt{8}$.

Г л а в а 11

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

$$11.1. \log_5 6 = \frac{\lg 6}{\lg 5} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 10 - \lg 2} = \frac{a+b}{1-a}.$$

11.2. Так как $1225 = 35^2$, то

$$\lg 122,5 = \lg 35^2 - \lg 10 = 2(\lg 5 + \lg 7) - 1 = 2(a+b) - 1.$$

11.3. Перепишем уравнение в виде

$$3^{2x} + 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{7}{2}} + 2^{x+\frac{1}{2}},$$

т. е., после того как вынесем 3^{2x-1} и $2^{x+\frac{1}{2}}$ за скобки,

$$3^{2x-3} = 2^{x-\frac{3}{2}}.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$3^{2x-3} = (\sqrt{2})^{2x-3},$$

т. е. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{2x-3} = 1$, откуда $2x-3=0$.

Ответ. $x = \frac{3}{2}$.

11.4. Обозначив $3^{-|x-2|} = y$, придем к квадратному уравнению

$$y^2 - 4y - a = 0,$$

корни которого

$$y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+a}.$$

Первый корень $y_1 = 2 + \sqrt{4+a}$ приходится отбросить, так как $-|x-2| \leq 0$ и $3^{-|x-2|} \leq 1$, а $2 + \sqrt{4+a}$ не может стать меньше двух.

Исследуем второй корень:

$$3^{-|x-2|} = 2 - \sqrt{4+a}.$$

Чтобы это уравнение имело решение, необходимо выполнение трех условий, которые сведены в систему неравенств:

$$\begin{cases} 4+a \geq 0, \\ 2 - \sqrt{4+a} > 0, \\ 2 - \sqrt{4+a} \leq 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $-3 \leq a < 0$.

Ответ. При $-3 \leq a < 0$ два решения:

$$x_{1,2} = 2 \pm \log_3(2 - \sqrt{4+a}),$$

при остальных a решений нет.

11.5. Решая квадратное уравнение относительно $12^{|x|}$, найдем

$$12^{|x|} = 1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Первое ограничение: $1-a \geq 0$, т. е. $a \leq 1$. Кроме того, $12^{|x|}$ не может стать меньше единицы. Если перед корнем выбран знак плюс, то последнее требование выполняется, если же взят знак минус, то $1 - \sqrt{1-a} \geq 1$ лишь при $a = 1$. Это значение a можно учесть при рассмотрении уравнения $12^{|x|} = 1 + \sqrt{1-a}$.

Ответ. $x = \pm \log_{12}(1 + \sqrt{1-a})$ при $a \leq 1$; при остальных a решений нет.

11.6. Уравнение можно записать так:

$$5x \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 5^2 \cdot 2^2;$$

один корень можно указать сразу: $x = 2$. Прологарифмируем теперь уравнение по основанию 10:

$$x \lg 5 + \frac{3x}{x+1} \lg 2 = 2,$$

т. е.

$$x^2 \lg 5 + (\lg 5 + 3 \lg 2 - 2)x - 2 = 0.$$

Так как $x_1 = 2$, то по теореме Виета

$$x_2 = \left(-\frac{2}{\lg 5}\right) : 2 = -\frac{1}{\lg 5}.$$

Сделайте проверку.

Ответ. $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{\lg 5}$.

11.7. Так как $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$, то $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$ — взаимно обратные числа. Обозначим

$$(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} = y.$$

Тогда данное уравнение можно записать так:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{101}{10}$$

(мы разделили обе части уравнения на $2 + \sqrt{3}$).

Решая это уравнение, найдем

$$y_1 = \frac{1}{10}, y_2 = 10.$$

Покажем, что первый корень, который приводит к уравнению

$$(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} = \frac{1}{10}$$

посторонний.

Так как $2 + \sqrt{3} > 1$, то $x^2 - 2x < 0$. Выражение $x^2 - 2x$ достигает своего минимума в точке $x = 1$. Этот минимум равен -1 . Поскольку $2 + \sqrt{3} < 4$, то в левой части последнего уравнения стоит число, большее $1/4$, а следовательно, ни при каких x не равное $1/10$.

Остается решить уравнение

$$(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} = 10.$$

Прологарифмируем его по основанию $2 + \sqrt{3}$:

$$x^2 - 2x - \log_{2+\sqrt{3}} 10 = 0.$$

Ответ. $x = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\lg(2 + \sqrt{3})}}.$

11.8. Перепишем уравнение так:

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1.$$

Сразу же видно, что $x=2$ — корень уравнения. Покажем, что других корней нет.

Обозначим для удобства первое основание через a , а второе через b . Оба эти основания меньше единицы. Поэтому

$$b < a < 1;$$

если $x < 2$, то $a^x > a^2$, $b^x > b^2$, и следовательно,

$$a^x + b^x > 1;$$

если же $x > 2$, то $a^x < a^2$, $b^x < b^2$, и следовательно,

$$a^x + b^x < 1.$$

Ответ. $x=2$.

11.9. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 4x},$$

откуда получаем следствие исходного уравнения:

$$\log_2 4x = \log_2 x \log_2 2x,$$

т. е.

$$2 + \log_2 x = \log_2 x (1 + \log_2 x), \quad \log_2^2 x = 2,$$

откуда

$$\log_2 x = \pm \sqrt{2}, \quad x = 2^{\pm \sqrt{2}}.$$

Проверка показывает, что оба значения x — корни исходного уравнения.

Ответ. $x_{1,2} = 2^{\pm \sqrt{2}}$.

11.10. Так как $\log_3(3^{x+1}-3) = 1 + \log_3(3^x-1)$, то обозначив $\log_3(3^x-1)$ через y , получим

$$y^2 + y - 6 = 0,$$

откуда $y_1 = -3$, $y_2 = 2$.

Если $\log_3(3^x-1) = -3$, то $3^x = \frac{28}{27}$ и $x_1 = \log_3 28 - 3$.

Если $\log_3(3^x-1) = 2$, то $3^x = 10$ и $x_2 = \log_3 10$.

Ответ. $\log_3 28 - 3$, $\log_3 10$.

11.11. Перепишем уравнение в виде

$$\log_7 x + \log_x 7 = \log_7^2 x + \log_x^2 7 - \frac{7}{4}.$$

Дополним правую часть его до полного квадрата суммы (заметим, что $\log_7 x \cdot \log_x 7 = 1$) и обозначим

$$\lg_7^2 x + \log_x^2 7 = y.$$

Получим уравнение:

$$4y^2 - 4y - 15 = 0, \text{ откуда } y_1 = \frac{5}{2}, \quad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Если $\log_x 7 + \log_7 x = \frac{5}{2}$, то

$$2 \log_x^2 7 - 5 \log_x 7 + 2 = 0, \quad \log_x 7 = \frac{5 \pm 3}{4}; \quad x_1 = 49, \quad x_2 = \sqrt{7}.$$

Если же $\log_x 7 + \log_7 x = -\frac{3}{2}$, то получим уравнение

$$2 \log_x^2 7 + 3 \log_x 7 + 2 = 0,$$

у которого нет действительных корней.

Ответ. $x_1 = 49$, $x_2 = \sqrt{7}$.

11.12. Прологарифмируем по основанию 3 и перейдем к общему основанию логарифмов:

$$\frac{1}{\log_3 x} + \log_3^2 x = 2,$$

откуда следует уравнение

$$y^3 - 2y + 1 = 0,$$

где $y = \log_3 x$.

Так как $y^3 - 2y + 1 = (y-1)(y^2 + y - 1)$, то

$$y_1 = 1, \quad y_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Находим соответствующие x и проверяем их.

$$\text{Ответ. } x_1 = 3, \quad x_{2,3} = 3^{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

11.13. Если $y = \log_x 3$, то приходим к уравнению

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2} y} \frac{1}{y} + 1 = 0,$$

из которого получается цепочка следствий

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2}y} = -y, \quad 1 + \frac{3}{2}y = y^2, \\ 2y^2 - 3y - 2 = 0, \quad y_1 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = 2.$$

Проверкой убеждаемся, что второе значение y не удовлетворяет исходному уравнению, так как y должен быть отрицательным.

Ответ. $x = \frac{1}{9}$.

11.14. Приведем уравнение к общему знаменателю и отбросив его, получим следствие данного уравнения:

$$\log_4 x + \log_4 (10 - x) = 2,$$

откуда

$$x^2 - 10x + 16 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 8.$$

Проверкой убеждаемся, что это — корни исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 2, \quad x_2 = 8$.

11.15. Перепишем данное уравнение так:

$$\frac{1}{\log_x 0,5x} - \frac{21}{\log_x 16x} + \frac{10}{\log_x 4x} = 0.$$

При этом преобразовании мы могли потерять корень, так как при $x = 1$ левая часть полученного уравнения теряет смысл, в то время как обе части исходного уравнения существуют. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ — корень данного уравнения¹⁾.

Преобразуем выражения, стоящие в знаменателях и обозначим $\log_x 2 = y$:

$$\frac{1}{1-y} - \frac{21}{4y+1} + \frac{10}{2y+1} = 0.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2y^2 + 3y - 2 = 0, \\ (1-y)(4y+1)(2y+1) \neq 0. \end{cases}$$

¹⁾ Заметим, что если бы мы перешли к основанию 2, то получили бы уравнение, равносильное данному. Убедитесь в этом самостоятельно.

При $y = -2$ и $y = \frac{1}{2}$, являющихся корнями уравнения, условие, входящее в систему, удовлетворяется.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = 4$.

11.16. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\log_2(3+x)}{\log_2(3+x)} + 2 \log_{\frac{1}{4}}(4-x) = \log_2(3+x).$$

Так как

$$\frac{\log_2(3+x)}{\log_2(3+x)} = \frac{\log_{(3+x)}6}{\log_{(3+x)}2} = \log_2 6,$$

то приходим к уравнению

$$\log_2 6 - \log_2(4-x) = \log_2(3+x),$$

откуда

$$x^2 - x - 6 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 3.$$

Все применявшиеся преобразования приводили к следствию исходного уравнения. Первый корень при проверке отбрасываем, так как $\frac{1}{\log_2(3+x)}$ при $x = -2$ не существует.

Ответ. $x = 3$.

11.17. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \lg|x^4 + 2x^3 + 2x - 1| = 2 \lg|x^2 + x - 1|, \\ |x^2 + x - 1| \neq 1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} |x^4 + 2x^3 + 2x - 1| = |x^2 + x - 1|^2, \\ |x^2 + x - 1| \neq 1, \\ x^2 + x - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение, после чего проверим, выполняются ли наши ограничения. Уравнение распадается на два. Если

$$x^4 + 2x^3 + 2x - 1 = (x^2 + x - 1)^2,$$

то, раскрывая скобки, получим

$$x^2 + 4x - 2 = 0, \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}.$$

Если же

$$x^4 + 2x^3 + 2x - 1 = -(x^2 + x - 1)^2;$$

то

$$x^2(2x^2 + 4x - 1) = 0; \quad x_3 = 0, \quad x_{4,5} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

Остается проверить выполнение двух условий, входящих в последнюю систему. Лишь при $x=0$ нарушается условие $|x^2 + x - 1| \neq 1$. При остальных найденных значениях x оба условия выполняются.

Ответ. $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}; \quad x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}.$

11.18. Преобразуем первое слагаемое:

$$a^{\log \sqrt{b} x} = a^{2 \log_b x} = a^{2 \frac{\log_a x}{\log_a b}} = (a^{\log_a x})^{2 \log_b a} = x^{2 \log_b a}.$$

При переходе к логарифмам с основанием a мы наложим на a дополнительное ограничение: $a \neq 1$. Однако при $a=1$ данное нам уравнение не имеет решений, и, следовательно, такое ограничение несущественно. При замене $a^{\log_a x}$ на x могут быть введены посторонние корни $x < 0$.

Мы получили уравнение относительно $y = x^{\log_b a}$:

$$y^2 - 5y + 6 = 0; \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 3,$$

откуда

$$x_1 = 2^{\log_a b}, \quad x_2 = 3^{\log_a b}, \quad \text{где } b \neq 1.$$

Ответ. При $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ $x_1 = 2^{\log_a b}$, $x_2 = 3^{\log_a b}$.

11.19. Логарифмируя и заменяя $\log_x a$ на $\frac{1}{\log_a x}$, получим

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \log_a x) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\log_a x} + 1\right)} + \\ + \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x - 1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\log_a x} - 1\right)} = a,$$

т. е.

$$\frac{1}{2\sqrt{\log_a x}} (\sqrt{(\log_a x + 1)^2} + \sqrt{(\log_a x - 1)^2}) = a.$$

Отсюда видно, что если x удовлетворяет этому уравнению, то $\log_a x > 0$, а потому $\log_a x + 1 > 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\sqrt{\log_a x}} (\log_a x + 1 + |\log_a x - 1|) = a.$$

Чтобы разбирать меньшее количество различных случаев, оценим левую часть последнего уравнения и, следовательно, a . Так как

$$\frac{\log_a x + 1}{2 \sqrt{\log_a x}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\log_a x} + \frac{1}{\sqrt{\log_a x}} \right) \geq 1,$$

а второе слагаемое неотрицательно, то $a > 1$ (значение $a = 1$ мы исключили, так как a — основание логарифма). Остается рассмотреть случаи, позволяющие раскрыть символ абсолютной величины.

При $\log_a x \geq 1$, т. е. при $x \geq a > 1$, получим уравнение

$$\sqrt{\log_a x} = a, \quad x = a^{a^2}.$$

Так как $a > 1$, то $x > a$.

При $0 < \log_a x < 1$, т. е. при $x < a$, получим второе значение неизвестного:

$$x = a^{\frac{1}{a^2}},$$

которое будет меньше a , так как $a > 1$.

Ответ. При $a > 1$ $x_1 = a^{a^2}$, $x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$.

11.20. Если одно из неизвестных равно нулю, то в силу второго уравнения системы равно нулю и второе неизвестное. Это приводит к потере смысла в первом уравнении. Таким образом, x и y оба положительны.

Прологарифмируем оба уравнения:

$$\begin{cases} y \lg x = x \lg y, \\ y \lg 15 = x \lg 3. \end{cases}$$

Так как $x > 0$ и $y > 0$, то разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{\lg x}{\lg 15} = \frac{\lg y}{\lg 3}, \quad \lg x^{\lg 3} = \lg y^{\lg 15},$$

а потому

$$x^{\lg 3} = y^{\lg 15}, \quad x = y^{\frac{\lg 15}{\lg 3}} = y^{\log_3 15}.$$

Подставим найденное значение x в первое из данных уравнений:

$$y^{y^{\log_3 15}} = y^{y^{\log_3 15}}.$$

Если $y = 1$, то из первого уравнения системы получаем $x = 1$, что не удовлетворяет второму уравнению.

Так как значения $y = 0$ и $y = -1$ исключены, то остается

$$y \log_3 15 = y^{\log_3 15}, \quad y^{\log_3 15 - 1} = \log_3 15.$$

Вспомнив, что $\log_3 15 = 1 + \log_3 5$, получим

$$y^{\log_3 5} = \log_3 15, \text{ т. е. } y = (\log_3 15)^{\log_3 5},$$

и найдем x .

$$\text{Ответ. } x = (\log_3 15)^{\log_3 15}, \quad y = (\log_3 15)^{\log_3 5}.$$

11.21. Возведем второе уравнение в степень y

$$1024 = \left(\frac{2}{3}x\right)^{2y}$$

и воспользуемся тем, что $x^y = 243$. Так как $1024 = 2^{10}$, а $243 = 3^5$, то получим

$$2^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} \cdot 3^{10},$$

откуда

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y}$$

и $y = 5$. Остается найти x :

$$x = 3.$$

Делаем проверку и убеждаемся, что мы нашли решение системы.

Ответ. (3, 5).

11.22. Из самого вида системы следует, что

$$x > 0, \quad y > 0.$$

Из второго уравнения имеем

$$x = y^{\frac{3}{2}} (\sqrt[4]{x + \sqrt{y}}),$$

а после подстановки в первое

$$y^{\frac{3}{2}} (\sqrt[4]{x + \sqrt{y}})^3 = y^{\frac{8}{3}}.$$

Если $y \neq 1$ (случаи $y = 0$ и $y = -1$ уже исключены), то, приравнявая показатели степеней, получим

$$(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y})^2 = \frac{16}{9},$$

т. е.

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt{y} = \frac{4}{3}.$$

Подставляя в первое уравнение, найдем

$$\sqrt{y} = \sqrt[4]{x}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{y} = \sqrt[4]{x} = \frac{2}{3},$$

откуда получаем $x_1 = \frac{16}{81}$, $y_1 = \frac{4}{9}$. Проверкой убеждаемся, что это — решение исходной системы.

Остается проверить, что произойдет при $y = 1$. Легко видеть, что тогда и $x = 1$.

Ответ. $(\frac{16}{81}, \frac{4}{9})$, $(1, 1)$.

11.23. Так как

$$11^z = 21 - 2 \cdot 5^{\frac{y}{2}}, \quad \frac{11^{xz}}{11^z} = 16 - 5^{\frac{y}{2}},$$

то

$$11^{xz} = (21 - 2 \cdot 5^{\frac{y}{2}}) (16 - 5^{\frac{y}{2}}).$$

Подставив в первое уравнение исходной системы и обозначив $5^{\frac{y}{2}} = u$, получим

$$(21 - 2u)(16 - u) - 2u^2 = 71,$$

а после раскрытия скобок

$$u = 5, \text{ т. е. } y = 2.$$

Остальные неизвестные находятся легко.

Ответ. $(2, 2, 1)$.

11.24. Второе уравнение можно записать в виде

$$2^{x+2y} (x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 2^{2x+y}) = 1.$$

В силу первого уравнения системы выражение в скобках равно 2. Поэтому

$$2^{x+2y+1} = 1,$$

откуда

$$x + 2y + 1 = 0, \text{ т. е. } x = -2y - 1.$$

После подстановки в первое уравнение системы получим

$$2^{-3y-3} = \frac{1}{-4-5y}, \text{ или } 2^3(y+1) = -(4+5y).$$

Чтобы это уравнение имело решение, необходимо выполнение неравенства

$$-(4+5y) > 0, \text{ т. е. } y < -\frac{4}{5}.$$

Рассмотрим следующие три случая.

а) $3(y+1) < 0$, т. е. $y < -1$. В этом случае правая часть уравнения должна быть меньше единицы, т. е. $-(4+5y) < 1$, откуда $y > -1$. Поскольку ограничения $y < -1$ и $y > -1$ несовместны, при сделанном предположении нет решений.

б) $3(y+1) > 0$, т. е. $y > -1$. Тогда правая часть уравнения должна превзойти единицу, а потому $y < -1$. И на этот раз ограничения несовместны.

в) Остается посмотреть, что будет при $3(y+1) = 0$, т. е. $y = -1$. Легко проверить, что уравнение удовлетворяется. Найденному значению y соответствует $x = 1$. Проверкой убеждаемся, что мы нашли решение исходной системы.

Ответ. (1, -1).

11.25. Первое уравнение системы можно переписать в виде

$$\log_8 (y-x)^3 = \log_8 (3y-5x).$$

Следствием данной системы является система

$$\begin{cases} (y-x)^3 = 3y-5x, \\ 5 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Перемножив входящие в нее уравнения, получим однородное уравнение относительно x и y :

$$5(y-x)^3 = (3y-5x)(x^2+y^2).$$

Если $x \neq 0$, то разделим последнее уравнение почленно на

x^3 и обозначим $\frac{y}{x} = u$. Получим уравнение относительно u

$$u^3 - 5u^2 + 6u = 0,$$

которое имеет корни: $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$.

Если $u = 0$, то $y = 0$, а из второго уравнения исходной системы $x = \pm \sqrt{5}$.

При подстановке в первое уравнение исходной системы $x = -\sqrt{5}$ и $y \neq 0$ это уравнение удовлетворяется, а при $x = \sqrt{5}$ и $y = 0$ уравнение не удовлетворяется. Если $u = 3$, то $y = 3x$, а потому $x^2 = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$ (x и y , в силу равенства $y = 3x$, имеют одинаковые знаки). Подстановкой в первое уравнение убеждаемся, что решением системы будет $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Если $u = 2$, то $y = 2x$. Из двух систем значений $(-1, -2)$, $(1, 2)$ первому уравнению удовлетворяет только вторая.

Осталось рассмотреть случай $x = 0$. Он не дает новых решений, так как система превращается в два несовместных уравнения.

Ответ. $(-\sqrt{5}, 0)$; $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$; $(1, 2)$.

11.26. Из второго уравнения

$$y = x^{-1} \cdot 3^{\frac{8}{3}}.$$

Подставляем в первое:

$$20x^{-\log_3 x + \frac{8}{3}} + 7x^{-\log_3 x} \cdot 3^{\frac{8}{3} \log_3 x} = 81 \sqrt[3]{3}.$$

Так как

$$3^{\frac{8}{3} \log_3 x} = (3^{\log_3 x})^{\frac{8}{3}} = x^{\frac{8}{3}},$$

то получим уравнение

$$20x^{\frac{8}{3} - \log_3 x} + 7x^{\frac{8}{3} - \log_3 x} = 81 \sqrt[3]{3},$$

откуда

$$x^{\frac{8}{3} - \log_3 x} = 3^{\frac{4}{3}}.$$

Прологарифмируем по основанию 3:

$$3 \log_3^2 x - 8 \log_3 x + 4 = 0,$$

откуда $x_1 = 3^{\frac{2}{3}}$, $x_2 = 9$.

Находим соответствующие y и делаем проверку.

Ответ. $(\sqrt[3]{9}, 9)$, $(9, \sqrt[3]{9})$.

11.27. Так как x и y одного знака (это следует из второго уравнения) и $x+y > 0$ (из первого), то x и y положительны, причем либо x , либо y обязательно больше 1 (так как $xy=3$). Следовательно, $x+y > 1$ и данная система может быть переписана так:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + |\log_2(x-y)| = 3, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Если $0 < x-y < 1$, то получим систему

$$\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = 3, \\ xy = 3, \end{cases}$$

следствием которой является система

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 8, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Из первого уравнения получим $7x=9y$. Подставляя сюда $y = \frac{3}{x}$, найдем $x^2 = \frac{27}{7}$, откуда

$$x = 3 \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (x > 0), \quad y = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Убеждаемся, что при этих значениях x и y неравенство $0 < x-y < 1$ выполняется.

Если $x-y > 1$, то получим систему

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 3, \\ xy = 3, \end{cases}$$

следствием которой является система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Подставляя в первое уравнение $y = \frac{3}{x}$, получим уравнение

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Так как $x^2 \neq -1$, то остается $x^2 = 9$, откуда $x = 3$, а $y = 1$.
(Ограничение $x - y > 1$ удовлетворяется.)

Равносильность могла быть нарушена только при потенцировании; поэтому достаточно проверить, что $x - y > 0$, что уже сделано.

Ответ. $\left(3 \sqrt[3]{\frac{3}{7}}, \sqrt[3]{\frac{7}{3}}\right); (3, 1).$

11.28. Прологарифмируем и обозначим $\log_2 x = u$, $\log_2 (y + 1) = v$:

$$\begin{cases} 2u + \frac{1}{2}v = 3, \\ uv = 2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 4u + v = 6, \\ uv = 2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = \frac{1}{2}, \\ v_2 = 4. \end{cases}$$

Находим соответствующие x и y ; проверка не обязательна, так как равносильность не была нарушена.

Ответ. $(\sqrt[3]{2}, 15); (2, 3).$

11.29. Так как $\log_{a^2} x = \frac{1}{2} \log_a x$ (обратите внимание на то, почему мы не пишем здесь $\log_{|a|} x$), а $\log_{\sqrt{b}} \sqrt{y} = \log_b y$, то систему можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} 2 \log_a x + \log_a x = 2, \\ y + x^2 = 2a. \end{cases}$$

Это — следствие первоначальной системы; если же добавить условия $y > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, то получим равносильную систему.

Из первого уравнения

$$x = \sqrt[3]{a^2}, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1,$$

Подставляем во второе и находим

$$y = 2a - \sqrt[3]{a^4}.$$

Условие $2a > \sqrt[3]{a^4}$, т. е. $8a^3 \geq a^4$, приводит к дополнительному ограничению на a :

$$a < 8.$$

Ответ. При $0 < a < 1$, $1 < a < 8$ и при $b > 0$, $b \neq 1$
 $x = \sqrt[3]{a^3}$, $y = 2a - \sqrt[3]{a^4}$.

11.30. Пусть $3^{x+1} = u$, $3^{y+z-x} = v$, тогда первые два уравнения примут вид

$$\begin{cases} 7u - 6v = 9, \\ 2u + v = 27, \end{cases}$$

откуда $u = 9$, $v = 9$. Следовательно, $x = 1$, а $y + z - x = 2$, т. е. $y + z = 3$.

Последнее уравнение данной системы примет теперь простой вид

$$\lg yz = \lg 2,$$

следствием которого будет

$$yz = 2.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} y + z = 3, \\ yz = 2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} y_1 = 1, \\ z_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 2, \\ z_2 = 1. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что мы нашли решения исходной системы уравнений.

Ответ. (1, 1, 2); (1, 2, 1).

Г л а в а 12

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

12.1. В первых квадратных скобках после упрощений получим $\frac{2}{\sin x}$, вторые квадратные скобки заключают в себе выражение

$$\frac{4(1 - \sin x \cos x)}{3 \sin^2 x}.$$

Таким образом, первое слагаемое принимает вид

$$\frac{1}{2(1 - \sin x \cos x)}.$$

Второе слагаемое легко приводится к виду

$$-\frac{\cos x - \sin x}{2(1 - \sin x \cos x)(\sin x + \cos x)}.$$

Ответ. $\frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$

12.2. Так как сумма углов $30^\circ - \alpha$ и $60^\circ - \alpha$ равна $90^\circ - 2\alpha$, то

$$\operatorname{tg}[(30^\circ - \alpha) + (60^\circ - \alpha)] = \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha},$$

откуда следует наше тождество.

12.3. Рассмотрим выражение

$$\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$, то

$$\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

Аналогичные преобразования можно продолжить и дальше:

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} = \frac{1}{2^2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^2},$$

$$\dots \dots \dots \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n},$$

что и доказывает тождество.

12.4. Перепишем равенство

$$\sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$$

в виде

$$\sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha],$$

т. е.

$$\sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \sin \alpha \cos(\alpha + \beta),$$

или

$$2 \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha.$$

Из условия следует, что $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ и $\cos \alpha \neq 0$. Разделим последнее равенство на $\cos(\alpha + \beta) \cos \alpha$. Получим

$$2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

12.5.

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}}.$$

Применяя последовательно формулу синуса двойного угла, приведем числитель к виду $\frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{7}$.

Ответ. $-\frac{1}{8}$.

12.6. Вычислим вначале произведение косинусов:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \\ &= \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{7}} \cdot 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8 \sin \frac{\pi}{7}} \cdot 2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \\ &= \frac{1}{8 \sin \frac{\pi}{7}} \cdot 2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим произведение квадратов синусов, умноженное на 8:

$$\begin{aligned} 8 \sin^2 \frac{\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{3\pi}{7} &= \\ &= \left(1 - \cos \frac{2\pi}{7}\right) \left(1 - \cos \frac{4\pi}{7}\right) \left(1 - \cos \frac{6\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Раскроем скобки и преобразуем каждое произведение двух косинусов в сумму косинусов. После приведения подобных получим

$$\begin{aligned} 8 \sin^2 \frac{\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{3\pi}{7} &= 1 - \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = \\ &= 1 - \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Теперь можно найти произведение тангенсов.

Ответ. $\sqrt{7}$.

12.7. Преобразуем правую часть равенства, которое нужно доказать:

$$\frac{aA+bB}{aB+bA} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{A}{B} + 1}{\frac{a}{b} + \frac{A}{B}}$$

и воспользуемся условием. Получим

$$\begin{aligned} \frac{aA+bB}{aB+bA} &= \frac{\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} \cdot \frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} + 1}{\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} + \frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}} = \\ &= \frac{\sin(x-\alpha) \cos(x-\alpha) + \sin(x-\beta) \cos(x-\beta)}{\sin(x-\alpha) \cos(x-\beta) + \sin(x-\beta) \cos(x-\alpha)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} [\sin 2(x-\alpha) + \sin 2(x-\beta)]}{\sin(2x-\alpha-\beta)} = \\ &= \frac{\sin(2x-\alpha-\beta) \cos(\alpha-\beta)}{\sin(2x-\alpha-\beta)} = \cos(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

12.8. Доказательство представляет собой цепочку преобразований

$$\begin{aligned} \sin(x+y) \sin(x-y) &= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \\ &= k^2 \sin^2 y \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 y (k^2 \cos^2 y - \cos^2 x). \end{aligned}$$

Так как $\cos^2 x = 1 - k^2 \sin^2 y$, то выражение в скобках равно $k^2 - 1$. По условию $-1 \leq k \leq 1$, т. е. $k^2 - 1 \leq 0$, и, следовательно,

$$\sin(x+y) \sin(x-y) \leq 0.$$

12.9. Вычислим $a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 2 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= 2 + 2 \cos(\alpha - \beta) = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Теперь преобразуем правую часть равенства, которое нужно доказать:

$$\begin{aligned} \frac{4a}{a^2 + b^2 + 2b} &= \frac{4(\sin \alpha + \sin \beta)}{4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + 2(\cos \alpha + \cos \beta)} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right)} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

12.10. Обозначим $\sin^2 \alpha = a$, $\sin^2 \beta = b$, $\sin^2 \gamma = c$. Тогда данное в условии соотношение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{2abc}{(1-a)(1-b)(1-c)} + \frac{ab}{(1-a)(1-b)} + \\ + \frac{bc}{(1-b)(1-c)} + \frac{ac}{(1-a)(1-c)} = 1, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} 2abc + ab(1-c) + bc(1-a) + ac(1-b) - \\ - (1-a)(1-b)(1-c) = 0. \end{aligned}$$

После того как будут раскрыты скобки и приведены подобные члены, получим

$$-1 + c + b + a = 0,$$

что в первоначальных обозначениях соответствует равенству

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$

12.11.

$$\begin{aligned} A = \frac{\sin \alpha \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)}{\cos \alpha \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)} + \frac{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)}{\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)} + \\ + \frac{\sin \alpha \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)}{\cos \alpha \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin \alpha \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)}{\cos \alpha \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)} + \\
&\quad + \frac{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)} + \\
&\quad + \frac{\sin \alpha \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)}{\cos \alpha \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)} = \\
&= \frac{\sin \alpha \left[-\sin \frac{\pi}{3} + \sin (\pi + 2\alpha) \right] + \cos \alpha \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos (\pi + 2\alpha) \right]}{\cos \alpha \left[\cos \frac{\pi}{3} + \cos (\pi + 2\alpha) \right]} + \\
&\quad + \frac{\sin \alpha \left[\sin \frac{\pi}{3} + \sin (\pi + 2\alpha) \right]}{\cos \alpha \left[\cos \frac{\pi}{3} + \cos (\pi + 2\alpha) \right]} = \\
&= \frac{-\sin \alpha \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha + (\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha)}{\frac{1}{2} \cos \alpha - \cos \alpha \cos 2\alpha} = \\
&= \frac{-\frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos 3\alpha) + \frac{1}{2} \cos \alpha + \cos 3\alpha}{\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos 3\alpha)} = \frac{\frac{3}{2} \cos 3\alpha}{-\frac{1}{2} \cos 3\alpha} = -3.
\end{aligned}$$

При преобразованиях мы пользовались формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Ответ. —3.

12.12. Так как

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma = 2 \operatorname{ctg} \beta \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma),$$

то

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma = 2 \operatorname{tg} (\alpha + \gamma),$$

или

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma = 2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma - 1}.$$

Углы α и γ острые. Поэтому $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ и $\operatorname{ctg} \gamma > 0$ и на их сумму можно сократить:

$$1 = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma - 1},$$

откуда легко найти произведение котангенсов.

Ответ. 3.

Г л а в а 13

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

$$\begin{aligned} 13.1. \text{ Так как } \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= \sin x + \cos x, \text{ то} \\ 1 + \sin 2x + 2 \cos 3x \sin x + 2 \cos 3x \cos x &= \\ &= 2 \sin x + 2 \cos 3x + \cos 2x. \end{aligned}$$

Объединим одночлены, содержащие $\cos 3x$ и все оставшиеся одночлены:

$$2 \cos 3x (\sin x + \cos x - 1) + 2 \sin x (\sin x + \cos x - 1) = 0.$$

Получим уравнение

$$(\sin x + \cos x - 1) (\cos 3x + \sin x) = 0.$$

Если $\sin x + \cos x = 1$, т. е. $\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то

$$x = 2\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

Если $\cos 3x + \sin x = 0$, т. е. $\cos 3x = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$, то

$$x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad \text{и} \quad x = n\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. 2π ; $2\pi + \frac{\pi}{2}$; $\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$; $n\pi + \frac{\pi}{4}$.

13.2. Данное уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}, \quad \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x},$$

или

$$\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x} \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} - 1 \right) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (1 - \cos x)(\cos x - \sin x) = 0, \\ \sin^2 x \neq 1. \end{cases}$$

Решая уравнение этой системы, найдем

$$\cos x = 1, \text{ откуда } x = 2k\pi,$$

$$\cos x = \sin x, \quad \operatorname{tg} x = 1, \quad \text{откуда } x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Так как при $x = 2k\pi$ и $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ условие $\sin^2 x \neq 1$ выполняется, то найденные значения x являются корнями данного уравнения.

Ответ. $x = 2k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

13.3. Поскольку

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x},$$

мы приходим к уравнению

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}.$$

Левая и правая части этого уравнения содержат общий множитель $\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$. Поэтому уравнение можно записать в виде

$$\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x} \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} - \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{1 + \sin x + \sin^2 x} \right) = 0.$$

Первые корни получаем из уравнения $\cos x = 1$, откуда $x = 2k\pi$.

Остальные корни найдем, приведя к общему знаменателю дроби, стоящие в скобке, и выполнив вычитание. Получим уравнение

$$\frac{\sin^2 x + \cos x \sin^2 x - \cos^2 x - \sin x \cos^3 x}{(1 - \sin^2 x)(1 + \sin x + \sin^2 x)} = 0.$$

Числитель легко разложить на множители, если сгруппировать однородные члены:

$$\begin{aligned} (\sin^2 x - \cos^2 x) + \sin x \cos x (\sin x - \cos x) &= \\ &= (\sin x - \cos x)(\sin x + \sin x \cos x + \cos x). \end{aligned}$$

Знаменатель можно отбросить, так как при $\cos x = 0$ ни одна из скобок в разложении числителя не обращается в нуль. Заботиться о том, чтобы $1 + \sin x + \sin^2 x$ не обращалось в нуль, не нужно, так как это выражение всегда положительно.

Если $\sin x - \cos x = 0$, то $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Остается решить уравнение

$$\sin x + \sin x \cos x + \cos x = 0.$$

Мы знаем, что $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$. Отсюда

$$\sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}.$$

Сделав такую замену в оставшемся уравнении, получим квадратное уравнение относительно $y = \sin x + \cos x$

$$y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Записав $\sin x + \cos x$ в виде $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, мы убедимся, что корень $y_1 = -1 - \sqrt{2}$ является посторонним. Остается

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$x = 2k\pi \pm \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $2k\pi$; $\frac{\pi}{4} + k\pi$; $2k\pi \pm \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4}$.

13.4. Данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin 2x \sin 7x = \cos 2x \cos 7x, \\ \cos 2x \cos 7x \neq 0. \end{cases}$$

Преобразуя левую и правую части уравнения в сумму

тригонометрических функций, мы получим уравнение

$$\cos 9x = 0,$$

откуда $x = \frac{\pi}{18}(2n+1)$.

Из найденных значений x нужно выбрать те, при которых

$$\cos 2x \cos 7x \neq 0,$$

т. е. $\cos 5x + \cos 9x \neq 0$.

Так как речь идет о значениях неизвестного, при которых $\cos 9x = 0$, то остается потребовать, чтобы

$$\cos 5x \neq 0,$$

т. е. $5 \cdot \frac{\pi}{18}(2n+1) \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, откуда $\frac{5(2n+1)}{9} \neq 2k+1$.

Число $\frac{5(2n+1)}{9}$ не может быть четным, так как в его числителе лишь нечетные множители.

Оно будет целым, когда $\frac{2n+1}{9} = 2m+1$, т. е. при $n = 9m+4$.

Следовательно, корнями уравнения являются числа $x = \frac{\pi}{18}(2n+1)$ при $n \neq 9m+4$.

Ответ. $\frac{\pi}{18}(18m \pm 1); \frac{\pi}{18}(18m \pm 3); \frac{\pi}{18}(18m \pm 5);$
 $\frac{\pi}{18}(18m \pm 7).$

13.5. Если запишем данное уравнение в виде

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = 2 \sin x,$$

то получим равносильное уравнение. Однако дальнейшие преобразования заставляют нас ввести ограничения:

$$\begin{cases} \frac{(1 + \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2 \sin x, \\ \operatorname{tg} x \neq 0. \end{cases}$$

Далее

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 2 \sin x, \\ \operatorname{tg} x + 1 \neq 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 0. \end{cases}$$

Когда $\operatorname{tg} x \neq 0$, то и $\sin x \neq 0$. Это означает, что первое уравнение можно переписать в виде $\frac{1}{\cos x} = 2$, откуда $\cos x = \frac{1}{2}$, что обеспечивает выполнение всех ограничений.

Ответ. $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$.

13.6. Прибавив к обеим частям уравнения $\operatorname{tg} 3x$, получим

$$3(\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x) = \operatorname{tg} 3x(1 + \operatorname{tg}^2 2x),$$

или

$$\frac{3 \sin x}{\cos 3x \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x \cos^2 2x}.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 3 \sin x \cos 2x - \sin 3x = 0, \\ \cos 3x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение. Для этого представим произведение $\sin x \cos 2x$ в виде разности синусов. После приведения подобных членов получим

$$\sin 3x = 3 \sin x.$$

Воспользовавшись формулой синуса тройного угла, придем к уравнению

$$\sin x(3 - 4 \sin^2 x) = 3 \sin x,$$

или

$$\sin^3 x = 0,$$

откуда $x = \pi k$.

Легко проверить, что при $x = \pi k$ ни $\cos 2x$, ни $\cos 3x$ в нуль не обращаются.

Ответ. πk .

13.7. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \\ = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 3x.$$

Так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, то придем к уравнению

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right).$$

Если $\sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$, то $x_1 = \frac{\pi}{4}(4n-1)$. Остается

$$\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 1,$$

откуда

$$x_2 = n\pi, \quad x_3 = \frac{\pi}{4}(4n+1).$$

Серии чисел $x_1 = \frac{\pi}{4}(4n-1)$ и $x_3 = \frac{\pi}{4}(4n+1)$ можно объединить: $x_1 = \frac{\pi}{4}(2n+1)$.

Ответ. $\frac{\pi}{4}(2n+1)$; $n\pi$.

13.8. Перепишем уравнение следующим образом:

$$4(\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x) = \operatorname{tg} 2x(1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x).$$

Приведем выражения в скобках к виду, удобному для логарифмирования:

$$\frac{4 \sin x}{\cos 4x \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x \frac{\cos x}{\cos 4x \cos 3x}.$$

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4 \sin x = \cos x \operatorname{tg} 2x, \\ \cos 3x \neq 0, \\ \cos 4x \neq 0. \end{cases}$$

Так как $\cos x = 0$ не удовлетворяет уравнению, то его можно переписать так:

$$4 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x,$$

или

$$2 \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Мы воспользовались неабсолютным тождеством, которое исключает из области определения те значения x , при которых $\operatorname{tg} x$ не существует. Однако $\operatorname{tg} x$ входил в предыдущее уравнение, а потому существует, и потеря корней произойти не может. Из последнего уравнения, если $\operatorname{tg} x = 0$, получаем $x = \pi$.

Если $\operatorname{tg} x \neq 0$, то $2 - 2 \operatorname{tg}^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как $\cos 3x$ и $\cos 4x$ не обращаются при этом в нуль, то можно написать ответ.

Ответ. π ; $\pi \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

13.9. Уравнение можно переписать так:

$$\frac{\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right| + \sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|}{\cos x} = 4 \sin x.$$

Поскольку $0 < x < 2\pi$, то $0 < \frac{x}{2} < \pi$ и $\sin \frac{x}{2} > 0$. Однако $\cos \frac{x}{2}$ в этом интервале меняет знак, и нам придется разбить интервал на два: $0 < x \leq \pi$ и $\pi < x < 2\pi$.

Если $0 < x \leq \pi$, получим уравнение

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin 2x,$$

у которого может появиться лишь один посторонний корень при $\cos x = 0$.

Перепишем последнее уравнение так:

$$\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x,$$

и найдем его корни из интервала $0 < x \leq \pi$: $x_1 = \frac{\pi}{6}$.

$x_2 = \frac{3\pi}{10}$. Если $\pi < x < 2\pi$, придем к уравнению

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin 2x$$

или

$$\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x,$$

которое даст нам еще два корня: $x_3 = \frac{7\pi}{6}$, $x_4 = \frac{13\pi}{10}$. Очевидно, что для полученных углов $\cos x \neq 0$.

Ответ. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{10}$.

13.10. Перенеся $\sin \alpha$ в левую часть, запишем уравнение в виде

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x-2\alpha}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

или

$$\sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x-2\alpha}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Если $\sin \frac{x}{2} = 0$, то $x = 2\pi$ при любом α . Если $\cos \frac{x-2\alpha}{2} = \cos \frac{x}{2}$, то либо

$$\frac{x-2\alpha}{2} + \frac{x}{2} = 2\pi,$$

откуда $x = 2\pi + \alpha$, либо

$$\frac{x-2\alpha}{2} - \frac{x}{2} = 2\pi,$$

откуда $\alpha = 2\pi$.

Ответ. При любом α : 2π ; $2\pi + \alpha$; при $\alpha = 2\pi$ x — любое.

13.11. Уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos 2x = \sin^2 x - a, \quad \cos 2x = a - \sin^2 x.$$

Понизим степень в правой части каждого уравнения и найдем

$$\cos 2x = \frac{1-2a}{3}, \quad \cos 2x = 2a-1.$$

Первое уравнение имеет решение, если

$$-1 \leq \frac{1-2a}{3} \leq 1, \quad \text{т. е.} \quad -1 \leq a \leq 2.$$

Второе уравнение имеет решение, если $-1 \leq 2a-1 \leq 1$, т. е. $0 \leq a \leq 1$. Данное в условии уравнение при $-1 \leq a \leq 2$ имеет решения

$$x = \pi n \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-2a}{3},$$

а при $0 \leq a \leq 1$ решения

$$x = \pi n \pm \frac{1}{2} \arccos (2a-1).$$

Так как

$$0 \leq \frac{1}{2} \arccos \frac{1-2a}{3} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq \frac{1}{2} \arccos (2a-1) \leq \frac{\pi}{2},$$

то легко найти решения нашего уравнения, которые попадут в интервал $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$\text{Ответ. } \frac{1}{2} \arccos \frac{1-2a}{3}; \quad \pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-2a}{3};$$

$$2\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{1-2a}{3}$$

(существуют при $-1 \leq a \leq 2$);

$$\frac{1}{2} \arccos (2a-1), \quad \pi \pm \frac{1}{2} \arccos (2a-1); \quad 2\pi - \frac{1}{2} \arccos (2a-1)$$

(существуют при $0 \leq a \leq 1$).

13.12. Преобразуем подкоренное выражение следующим образом:

$$\sec^2 x (17 + 8 \sin x - 16 \cos^2 x) = \sec^2 x (1 + 8 \sin x + 16 \sin^2 x) = \sec^2 x (1 + 4 \sin x)^2.$$

Данное уравнение принимает вид

$$\frac{|1 + 4 \sin x|}{|\cos x|} = 2 \operatorname{tg} x (1 + 4 \sin x).$$

Если $1 + 4 \sin x = 0$, то $x = \pi n + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{4}$. Это — корни нашего уравнения, так как $\cos x \neq 0$ и $\operatorname{tg} x$ существует.

Если $1 + 4 \sin x \neq 0$, то придется рассмотреть два случая, зависящих от знака этого выражения.

Пусть $1 + 4 \sin x > 0$, т. е. $\sin x > -\frac{1}{4}$. Тогда мы придем к уравнению

$$\frac{1}{|\cos x|} = 2 \operatorname{tg} x, \quad \text{или} \quad 2 \operatorname{tg} x |\cos x| = 1,$$

которое равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

Вторая система не имеет решений при $\sin x > -\frac{1}{4}$. Решение первой: $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$.

Пусть, наконец, $1 + 4 \sin x < 0$, т. е. $\sin x < -\frac{1}{4}$. Уравнение

$$2 \operatorname{tg} x |\cos x| = -1,$$

к которому мы приходим в этом случае, равносильно такой совокупности систем:

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

Вторая система не имеет решений при $\sin x < -\frac{1}{4}$, а первая дает нам $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$.

Ответ. $n\pi + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{4}; \pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi$.

13.13. Поскольку $\operatorname{tg} x + \sin x = \operatorname{tg} x (1 + \cos x) = 2 \operatorname{tg} x \cos^2(x/2)$, а $\operatorname{tg} x - \sin x = 2 \operatorname{tg} x \sin^2(x/2)$, данное уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{2} \operatorname{tg}^{1/2} x \left(\left| \cos \frac{x}{2} \right| + \left| \sin \frac{x}{2} \right| - \sqrt{2} \cos x \right) = 0.$$

Первые решения получим при $\operatorname{tg} x = 0$; $x = k\pi$. Остальные решения нам доставят корни уравнения

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| + \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{2} \cos x,$$

при которых $\operatorname{tg} x > 0$ (случай $\operatorname{tg} x = 0$ уже исследован). Решим вначале последнее уравнение, а затем исключим те решения, которые не удовлетворяют неравенству $\operatorname{tg} x > 0$. Возведем это уравнение в квадрат и, чтобы не нарушить равносильности, добавим ограничение $\cos x \geq 0$. Получим систему

$$\begin{cases} 1 + |\sin x| = 2 \cos^2 x, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Так как $2 \cos^2 x = 2 - 2 \sin^2 x = 2 - 2 |\sin x|^2$, то придем к уравнению

$$2 |\sin x|^2 + |\sin x| - 1 = 0.$$

Решая его, найдем

$$|\sin x| = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

Так как $|\sin x| \geq 0$, то остается решить уравнение

$$|\sin x| = \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \sin x = \pm \frac{1}{2},$$

корнями которого будут

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

Если $k = 2n$, то $\cos x = \cos\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) > 0$; если же $k = 2n + 1$, то $\cos x = \cos\left(\pi \pm \frac{\pi}{6}\right) < 0$.

Остается вспомнить, что $\operatorname{tg} x > 0$.

Ответ. $k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

13.14. При замене $\frac{1}{\sin 4x}$ на $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 2x}{2 \operatorname{tg} 2x}$ можно ожидать потери корней, при которых $\operatorname{tg} 2x$ не существует, или, что то же самое, $\cos 2x = 0$. Однако при $\cos 2x = 0$ обращается в нуль и $\sin 4x$, т. е. потери корней не произойдет.

Так как в левую часть уравнения

$$\operatorname{ctg} 2x + 3 \operatorname{tg} 3x = 2 \operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 2x) \frac{1}{\operatorname{tg} 2x}$$

входит $\operatorname{ctg} 2x$, то, заменив $\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}$ на $\operatorname{ctg} 2x$ и раскрыв скобки, мы уничтожим в правой и левой частях $\operatorname{ctg} 2x$. Замена $\frac{1}{\operatorname{tg} 2x} = \operatorname{ctg} 2x$ грозит лишь приобретением корней, при которых $\operatorname{tg} 2x$ не существует, т. е. безопасна, так как $\operatorname{tg} 2x$ остается в уравнении. Когда происходит уничтожение одинаковых слагаемых $\operatorname{ctg} 2x$, то нужно добавить к уравнению

$$3 \operatorname{tg} 3x = 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x,$$

условие

$\operatorname{ctg} 2x$ существует.

Мы воспользовались попутно неабсолютным тождеством $\operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 2x = 1$, которое не приводит к приобретению посторонних корней, так как $\operatorname{tg} 2x$ и $\operatorname{ctg} 2x$ остались в системе.

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$2 (\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = 0,$$

т. е.

$$\frac{2 \sin 2x}{\cos 3x \cos x} + \frac{\sin x}{\cos 3x \cos 2x} = 0.$$

Теперь систему можно переписать так:

$$\begin{cases} 2 \sin 2x \cos 2x + \sin x \cos x = 0, \\ \sin 2x \neq 0, \\ \cos 3x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Так как $\sin 2x \neq 0$, то на него можно сократить. Получим уравнение

$$\cos 2x = -\frac{1}{4},$$

откуда $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{4} \right) + k\pi$. Поскольку при этих x все ограничения выполняются, найденные значения являются решениями данного уравнения.

Ответ. $\pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{4} \right) + k\pi$.

13.15. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x^2 + \cos x^2 + 1 = \sin x^2 \cos x^2, \\ \sin x^2 \neq 0, \\ \cos x^2 \neq 0. \end{cases}$$

Пусть $\sin x^2 + \cos x^2 = y$. Возведем это соотношение в квадрат:

$$1 + 2 \sin x^2 \cos x^2 = y^2,$$

откуда

$$\sin x^2 \cos x^2 = \frac{y^2 - 1}{2}.$$

После подстановки и простых преобразований уравнение примет вид

$$y^2 - 2y - 3 = 0,$$

откуда $y_1 = -1$, $y_2 = 3$. Второй корень посторонний, так как $\sin x^2 + \cos x^2$ всегда меньше двух.

Если

$$\sin x^2 + \cos x^2 = -1,$$

то

$$\cos \left(x^2 - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$x^2 = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

Взяв знак плюс, получим $x^2 = \pi(2n+1)$. Этот корень посторонний, так как $\sin x^2 \neq 0$.

Для знака минус получим, что $x^2 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Это тоже посторонний корень, так как $\cos x^2 \neq 0$.

Ответ. Нет решений.

13.16. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 6 \sin x - 2 \cos^3 x = 5 \sin 2x \cos x, \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение можно привести к однородному, домножив $6 \sin x$ на $\sin^2 x + \cos^2 x$:

$$3 \sin^3 x - \cos^3 x - 2 \sin x \cos^2 x = 0.$$

Обозначим $\operatorname{tg} x$ через y , получим

$$3y^3 - 2y - 1 = 0,$$

или

$$(y-1)(3y^2+3y+1)=0,$$

где квадратный трехчлен не имеет вещественных корней.

Остается $y=1$, т. е. $\operatorname{tg} x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$. Однако $\cos 2x$

при $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$ обращается в нуль.

Ответ. Нет решений.

13.17. С помощью формул универсальной подстановки придем к уравнению относительно $y=\operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$y(2y^3-7y^2-2y+1)=0.$$

В результате такой замены могли быть потеряны корни, так как $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ теряет смысл при $x=\pi(2k+1)$, в то время как $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ при этих значениях x имеют смысл. Проверкой убеждаемся, что эти значения неизвестного не являются корнями исходного уравнения.

Один корень полученного алгебраического уравнения очевиден: $y=0$. Второй мы найдем на основании теоремы о рациональных корнях многочлена, испытав $y=\pm 1$; $\pm \frac{1}{2}$.

Убеждаемся, что $y=-\frac{1}{2}$ — второй корень уравнения. Разделив многочлен $2y^3-7y^2-2y+1$ на $2y+1$, получим уравнение

$$y^2-4y+1=0,$$

которое даст еще два корня: $y=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$.

Если $\operatorname{tg} \frac{x}{2}=2+\sqrt{3}$, то $\sin x=\frac{2(2+\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2}$; то же самое мы получим и при $\operatorname{tg} \frac{x}{2}=2-\sqrt{3}$.

Итак, $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$. Последние два значения неизвестных нуждаются в проверке, так как при

использовании формулы $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \sin x$ возможно приобретение корней.

Ответ. $2\pi k$; $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $2\pi k - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

13.18. Понижением степени данное уравнение приводится к виду

$$2 \cos x = 1 + \cos \frac{3}{2} x.$$

С помощью формул для косинуса двойного и тройного угла приходим к уравнению относительно $y = \cos \frac{x}{2}$:

$$4y^3 - 4y^2 - 3y + 3 = 0.$$

Левую часть легко разложить на множители:

$$4y^2(y-1) - 3(y-1) = 0,$$

$$(y-1)(4y^2 - 3) = 0.$$

Если $\cos \frac{x}{2} = 1$, то $x_1 = 4\pi l$. Если $4 \cos^2 \frac{x}{2} = 3$, то $\cos x = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 2\pi l \pm \frac{\pi}{3}$.

Ответ. $4\pi l$; $2\pi l \pm \frac{\pi}{3}$.

13.19. Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках:

$$\begin{aligned} 2 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) &= (1 + \operatorname{ctg} x) + \left[1 + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] = \\ &= \sqrt{2} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}{\sin x} + \sqrt{2} \frac{\cos x}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \\ &= \sqrt{2} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \sin x \cos x}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \sin x} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\sin x \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)}{\sin x \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}. \end{aligned}$$

Теперь приведем к виду, удобному для логарифмирования, правую часть уравнения:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}(1 + \sin 2x + \cos 2x) &= 4\sqrt{2} \cos x (\sin x + \cos x) = \\ &= 8 \cos x \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right). \end{aligned}$$

В итоге получаем уравнение:

$$\frac{\sin 4x \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)}{\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = 8 \cos x \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right),$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 4x \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 8 \sin x \cos x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right), \\ \sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0. \end{cases}$$

Условие $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0$ подсказывает, что удобнее в левой части уравнения заменить $\sin 4x$ на его разложение, стоящее справа, чем наоборот. Сокращая после этого обе части уравнения на $8 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0$, получим уравнение

$$\cos x \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) - 1 \right] = 0.$$

Среди корней уравнений $\cos x = 0$ и $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ не может быть таких, при которых $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$.

Остается проверить корни уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 1$. Преобразуем вначале условие, которому они должны удовлетворять: $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0$, или $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - \cos\frac{\pi}{4} \neq 0$, т. е. $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$, или $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Теперь

ясно, что в уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 1$ не попали посторонние корни.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + n\pi$; $-\frac{\pi}{4} + n\pi$; $\frac{\pi}{8} + n\pi$.

13.20. Данное уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 5x = \\ = \frac{1}{2} \cos 3x + \sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|. \end{aligned}$$

После приведения подобных получим

$$-\frac{1}{2} \cos x = \sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|,$$

т. е.

$$-\frac{1}{2} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) = \sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|.$$

Обозначив $\left| \cos \frac{x}{2} \right| = y$, придем к квадратному уравнению

$$2y^2 + 2\sqrt{2}y - 1 = 0,$$

корни которого $y_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 2}{2}$. Один из корней отрицательный, а потому посторонний. Остается

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \frac{2 - \sqrt{2}}{2},$$

т. е. $\cos \frac{x}{2} = \pm \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Хотя можно было бы уже написать решения этих простейших уравнений, мы перейдем к синусу, что позволит объединить оба ответа:

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \mp \frac{2 - \sqrt{2}}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} x = 2n\pi + 7\pi + 2(-1)^n \arcsin\left(\mp \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) = \\ = 2n\pi + 7\pi \pm 2 \arcsin \frac{2 - \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ. $2n\pi + 7\pi \pm 2 \arcsin \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

13.21. Так как $\sin 4x = 4 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1)$, то данное уравнение можно переписать в виде

$$\sin x \left[4 \cos x (2 \cos^2 x - 1) - \frac{m}{\cos x} \right] = 0.$$

Если $\sin x = 0$, то $x = k\pi$. Это — корни данного уравнения, так как $\cos k\pi \neq 0$.

Если выражение в квадратных скобках равно нулю, то приходим к биквадратному уравнению

$$8 \cos^4 x - 4 \cos^2 x - m = 0,$$

среди корней которого не должно быть $\cos x = 0$.

Решая это биквадратное уравнение, получим

$$\cos^2 x = \frac{1 \pm \sqrt{1+2m}}{4}.$$

Так как $m > 0$, то перед корнем берем знак плюс. (Очевидно, что при этом $\cos x \neq 0$). Воспользуемся формулой

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

и преобразуем уравнение к виду

$$\cos 2x = \frac{-1 + \sqrt{1+2m}}{2}.$$

Правая часть этого уравнения положительна. Поэтому, чтобы уравнение имело решение, достаточно

$$\frac{-1 + \sqrt{1+2m}}{2} \leq 1, \quad \text{т. е.} \quad \sqrt{1+2m} \leq 3,$$

откуда $m \leq 4$.

Ответ. При $m > 0$ уравнение имеет решение $x = n\pi$; при $0 < m \leq 4$:

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1 + \sqrt{1+2m}}{2} + n\pi.$$

13.22. Раскроем скобки и применим формулу преобразования произведения синусов в разность косинусов:

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) + \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \dots \\ & \dots + \left(\cos \frac{199x}{2} - \cos \frac{201x}{2} \right) = \sin \frac{101x}{2}. \end{aligned}$$

Приведя подобные члены, получим

$$\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{201x}{2} = \sin \frac{101x}{2}, \text{ или } 2 \sin \frac{101x}{2} \sin 50x - \sin \frac{101x}{2} = 0,$$

откуда

$$\sin \frac{101x}{2} = 0, \quad x_1 = \frac{2n\pi}{101},$$

и

$$\sin 50x = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{n\pi}{50} + (-1)^n \frac{\pi}{300}.$$

Ответ. $\frac{n\pi}{50} + (-1)^n \frac{\pi}{300}; \frac{2n\pi}{101}.$

13.23. Так как

$$\sin kx \sin k^2x = \frac{1}{2} \{ \cos [(k-1)kx] - \cos [k(k+1)x] \},$$

то уравнение можно переписать в виде

$$1 - \cos 2x + \cos 2x - \cos 6x + \cos 6x - \cos 12x + \dots \\ \dots + \cos [(n-2)(n-1)x] - \cos [(n-1)nx] + \\ + \cos [(n-1)nx] - \cos [n(n+1)x] = 2,$$

откуда

$$\cos [n(n+1)x] = -1, \\ n(n+1)x = (2k+1)\pi, \quad x = \frac{2k+1}{n(n+1)}\pi.$$

Ответ. $\frac{2k+1}{n(n+1)}\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а натуральное n фиксировано.

13.24. Перенесем единицу в левую часть и запишем уравнение в виде

$$2 \cos x - \cos 2x - \cos^2 2x = 0,$$

или

$$2 \cos x - \cos 2x (1 + \cos 2x) = 0.$$

Выражение в скобках равно $2 \cos^2 x$. Поэтому

$$\cos x (1 - \cos x \cos 2x) = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

Если $\cos x \cos 2x = 1$, то

$$\text{либо } \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 2x = 1, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$$

Второе уравнение первой системы преобразуется к виду $2\cos^2 x - 1 = 1$, т. е. $\cos^2 x = 1$. Следовательно, $\cos x = 1$ и $x = 2\pi n$.

Для второй системы аналогично получим $\cos^2 x = 0$, что несовместно с первым уравнением $\cos x = -1$.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $2\pi n$.

13.25. Данное уравнение эквивалентно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \cos(\pi \sqrt{x}) = 1, \\ \cos(\pi \sqrt{x-4}) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi \sqrt{x}) = -1, \\ \cos(\pi \sqrt{x-4}) = -1. \end{cases}$$

Первая система может быть переписана так:

$$\begin{cases} \pi \sqrt{x} = 2\pi k, \\ \pi \sqrt{x-4} = 2\pi n, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = 2k, \\ \sqrt{x-4} = 2n, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = 4k^2, \\ x = 4n^2 + 4, \end{cases} \quad k, n = 0, 1, 2, \dots$$

(Для k и n берутся только неотрицательные значения.) Приравняв различные выражения для x , получим $k^2 = n^2 + 1$, откуда $(k-n)(k+n) = 1$. Так как k и n — целые и неотрицательные, то $k = 1$, $n = 0$.

Теперь x определяется однозначно: $x = 4$.

Решаем вторую систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 2k + 1, \\ \sqrt{x-4} = 2n + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (2k + 1)^2, \\ x = (2n + 1)^2 + 4, \end{cases}$$

где $k, n = 0, 1, 2, \dots$

Приравняв правые части последней системы, получим

$$(2k + 1)^2 - (2n + 1)^2 = 4,$$

т. е., разлагая на множители и сокращая на 4,

$$(k - n)(k + n + 1) = 1.$$

Так как n и k — целые и неотрицательные числа, то последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} k - n = 1, \\ k + n = 0, \end{cases}$$

которая не имеет целых решений.

Ответ. 4.

13.26. Данное уравнение можно переписать в виде

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

откуда

$$\sin^2 x (1 - \sin x) + \cos^2 x (1 - \cos x) = 0.$$

Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны нулю:

$$\begin{cases} \sin^2 x (1 - \sin x) = 0, \\ \cos^2 x (1 - \cos x) = 0. \end{cases}$$

Если в первом уравнении $\sin x = 0$, то $\cos x \neq 0$. Получаем систему

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases}$$

решения которой: $x = 2k\pi$.

Если в первом уравнении $1 - \sin x = 0$, т. е. $\sin x = 1$, то $\cos x \neq 1$. Приходим к системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0, \end{cases}$$

решения которой: $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$.

Ответ. $2k\pi$; $\frac{\pi}{2}(4k + 1)$.

13.27. Дополним левую часть данного уравнения до полного квадрата. Для этого придется ввести еще одно слагаемое: $\cos x \cos 3x$, знак которого зависит от знака $\cos x$.

Рассмотрим три случая.

а) Если $\cos x > 0$, то перепишем данное уравнение в виде

$$\cos^3 3x + \frac{1}{4} \cos^2 x - \cos x \cos 3x = \cos 3x \cos^4 x - \cos 3x \cos x,$$

или

$$\left(\cos 3x - \frac{1}{2} \cos x\right)^2 + \cos x \cos 3x (1 - \cos^3 x) = 0.$$

В левой части стоит сумма неотрицательных выражений, следовательно,

$$\begin{cases} \cos 3x = \frac{1}{2} \cos x, \\ \cos x \cos 3x (1 - \cos^3 x) = 0. \end{cases}$$

По предположению $\cos x > 0$. Из первого уравнения последней системы следует, что тогда $\cos 3x > 0$. Заметим, что $1 - \cos^3 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)$, причем всегда $1 + \cos x + \cos^2 x > 0$. В итоге приходим к системе

$$\begin{cases} \cos x = 2 \cos 3x, \\ \cos x = 1, \end{cases}$$

которая несовместна, так как при $\cos x = 1$ мы получим, что $\cos 3x = 1$, а не $\frac{1}{2}$.

б) Если $\cos x = 0$, то $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 0$, и данное уравнение удовлетворяется. Получаем совокупность корней: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

в) Если $\cos x < 0$, то преобразуем уравнение к виду

$$\left(\cos 3x + \frac{1}{2} \cos x\right)^2 + \cos 3x \cos x (-1 - \cos^3 x) = 0,$$

в котором снова оба слагаемых неотрицательны. Аналогично случаю а), это приводит нас к несовместной системе (закончить исследование самостоятельно).

Ответ. $\frac{\pi}{2} + n\pi$.

13.28. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin ax = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases}$$

решая которую найдем $ax = k\pi$ и $x = 2n\pi$. Приравнявая значения неизвестного, найденные из каждого уравнения, получим

$$\frac{k\pi}{a} = 2n\pi, \text{ т. е. } \frac{k}{a} = 2n.$$

Это в том случае, если $a \neq 0$. Но если $a = 0$, данное уравнение примет вид $\cos x = 1$ и, следовательно, имеет бесконечное множество корней.

Итак, $k = 2n\pi$.

Если $a = \frac{p}{q}$ — рациональное число, то $k = \frac{2n\pi}{q}$. Это значит, что при всех n , кратных q , мы будем получать корень данного уравнения $x = 2n\pi$, т. е. уравнение имеет бесконечное множество корней.

Пусть теперь a — иррациональное число. Тогда при всех n , кроме $n = 0$, k не будет целым, а уравнение будет иметь единственное решение $x = 0$.

Ответ. a — иррациональное.

13.29. Составим квадратное уравнение

$$z^2 - 2z + \frac{1}{2} = 0,$$

корни которого $z_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$, $z_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$. Так как $z_2 > 1$, то

$$\sin x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \quad \sec y = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \cos y = 2 - \sqrt{2}.$$

Ответ.

$$\begin{cases} x = n\pi + (-1)^n \arcsin\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ y = 2k\pi \pm \arccos(2 - \sqrt{2}). \end{cases}$$

13.30. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \cos(x - y) - 2\cos(x + y) = 0, \\ \cos(x - y) + \cos(x + y) = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x - y = 2n\pi, \\ x + y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

(Обратите внимание, что в решениях разных уравнений целочисленное переменное обозначено разными буквами. Объясните, почему нельзя использовать общее целочисленное переменное.)

Ответ.

$$\begin{cases} x = (n + k) \pi \pm \frac{\pi}{6}, \\ y = (k - n) \pi \pm \frac{\pi}{6}, \end{cases}$$

причем берутся или только верхние, или только нижние знаки.

13.31. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 1 - \sin^2 y + 3 \sin x \sin y = 0, \\ 21 (1 - 2 \sin^2 x) - (1 - 2 \sin^2 y) = 10. \end{cases}$$

Введем обозначения: $\sin x = u$, $\sin y = v$. Получим систему

$$\begin{cases} v^2 - 3uv = 1, \\ 21u^2 - v^2 = 5. \end{cases}$$

Воспользуемся заменой $v = ut$:

$$\begin{cases} u^2 (t^2 - 3t) = 1, \\ u^2 (21 - t^2) = 5, \end{cases}$$

откуда

$$5(t^2 - 3t) = 21 - t^2,$$

т. е.

$$2t^2 - 5t - 7 = 0, \quad t_1 = \frac{7}{2}, \quad t_2 = -1.$$

Если $t = \frac{7}{2}$, то из первого уравнения последней системы мы получим

$$u^2 = \frac{4}{7}; \quad u = \pm \frac{2}{\sqrt{7}}; \quad v = ut = \pm \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{7}{2} = \pm \sqrt{7},$$

что невозможно, так как $v = \sin y$.

Если же $t = -1$, то $u^2 = \frac{1}{4}$, $u = \pm \frac{1}{2}$.

Приходим к совокупности двух систем

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}, \\ v = -\frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} u = -\frac{1}{2}, \\ v = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6}(-1)^k + k\pi, \\ y = \frac{\pi}{6}(-1)^{n+1} + n\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}(-1)^{k+1} + k\pi, \\ y = \frac{\pi}{6}(-1)^n + n\pi. \end{cases}$$

13.32. Второе уравнение можно преобразовать так:

$$\sin y + \sin(2x - y) = \sin y,$$

т. е. $\sin(2x - y) = 0$, откуда $y = 2x + n\pi$. Подставим в первое уравнение системы

$$4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 4x.$$

При условии, что $\cos 3x \neq 0$ и $\cos 4x \neq 0$, это уравнение равносильно такому:

$$4 \sin 3x \cos 4x - 3 \sin 4x \cos 3x = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \sin 3x \cos 4x - 3(\sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x) &= 0, \\ \sin 3x \cos 4x - 3 \sin x &= 0. \end{aligned}$$

Так как $\sin 3x \cos 4x = \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin x)$, то приходим к уравнению

$$7 \sin x = \sin 7x.$$

По индукции можно доказать, что

$$\sin nx \leq n |\sin x|,$$

причем равенство достигается лишь при $x = k\pi$. Следовательно, уравнение $7 \sin x = \sin 7x$ имеет решения $x = k\pi$.

При этом $\cos 3x \neq 0$ и $\cos 4x \neq 0$.

Подставляя в выражение для y , получим

$$y = n\pi.$$

Ответ. $x = k\pi$, $y = n\pi$.

13.33. Возведем каждое уравнение в квадрат и сложим:

$$2 = \sin^2 y + 5 \cos^2 y,$$

откуда $\cos^2 y = \frac{1}{4}$, т. е. $\cos y = \pm \frac{1}{2}$.

Учитывая второе уравнение исходной системы, приходим к совокупности двух систем

$$\begin{cases} \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{\sqrt{10}}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{10}}{4}. \end{cases}$$

Возводя при решении оба уравнения в квадрат, мы могли приобрести посторонние решения. Отсеять их можно просто: достаточно выбрать $\sin x$ и $\sin y$ так, чтобы они имели одинаковый знак (для $\cos x$ и $\cos y$ мы это уже обеспечили). Оба эти требования означают, что x и y должны лежать в одной четверти.

Решая первую систему, получим

$$\begin{cases} y = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}, \\ x = 2\pi k \pm \arccos \frac{\sqrt{10}}{4}. \end{cases}$$

Значения x и y будут лежать в одной четверти, если мы одновременно возьмем только верхние или только нижние знаки.

Аналогично поступаем со второй системой.

Ответ.

$$\begin{cases} x = 2\pi k \pm \arccos \frac{\sqrt{10}}{4}, \\ y = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\pi k \pm \left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{10}}{4}\right), \\ y = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}, \end{cases}$$

где одновременно берут либо только верхние, либо только нижние знаки.

13.34. Так как $\sin \frac{\pi x^2}{2} = 1$, то

$$\frac{\pi x^2}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

откуда $x^2 = 4n + 1$ и $x = \pm \sqrt{4n + 1}$, $n \geq 0$.

Подставив во второе уравнение, найдем, что

$$|y| = 3 - |x| = 3 - \sqrt{4n + 1}.$$

Чтобы это равенство выполнялось, необходимо

$$3 - \sqrt{4n+1} \geq 0, \quad \text{т. е. } 9 \geq 4n+1,$$

откуда $n \leq 2$.

Ответ.

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{4n+1}, & x = \pm \sqrt{4n+1}, \\ y = 3 - \sqrt{4n+1}; & y = \sqrt{4n+1} - 3, \end{cases}$$

где $n=0, 1, 2$. Всего 12 решений (10 не совпадающих).

13.35. Разделив второе уравнение на первое, получим $\operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} x$. Так как $x+y=\pi-z$, то $\operatorname{tg} z = -\operatorname{tg}(\pi-z) = -\operatorname{tg}(x+y)$.

По формуле тангенса суммы получаем

$$-\operatorname{tg}(x+y) = -\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{3 \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg}^2 x - 1}.$$

Применение неабсолютного тождества не приводит к потере решений, так как $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ входят в данную систему.

Подставляем в первое уравнение

$$\frac{3 \operatorname{tg}^3 x}{2 \operatorname{tg}^2 x - 1} = 3,$$

откуда $\operatorname{tg}^2 x = 1$, $x = k\pi \pm \pi/4$. Найти y и z теперь не составляет труда.

Производя вычисления отдельно для $x = k\pi + \pi/4$ и для $x = k\pi - \pi/4$, после проверки получим решение системы.

Ответ.

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \\ y = n\pi + \operatorname{arctg} 2, \\ z = \frac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2 - \pi(k+n); \end{cases} \quad \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{4}, \\ y = n\pi - \operatorname{arctg} 2, \\ z = \frac{5\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2 - \pi(k+n). \end{cases}$$

13.36. Так как в уравнения системы входят одновременно $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} y$ и $\operatorname{ctg} y$, то неизвестные не могут принимать значения $\frac{k\pi}{2}$. С учетом этого данную систему можно записать сначала так:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} y} = a, \\ \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} y = 2, \end{cases}$$

а затем так:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + 1 = a \operatorname{tg} y, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + 1 = 2 \operatorname{tg} x, \end{cases}$$

откуда $a \operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} x$.

Если $a = 0$, то $\operatorname{tg} x = 0$, а $\operatorname{ctg} x$ не существует. Поэтому $a \neq 0$ и $\operatorname{tg} y = \frac{2}{a} \operatorname{tg} x$. Подставляем в первое уравнение системы

$$\operatorname{tg} x + \frac{2}{2 \operatorname{tg} x} = a,$$

т. е.

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 2a \operatorname{tg} x + a = 0.$$

Решаем последнее уравнение:

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a}}{2},$$

и находим $\operatorname{tg} y$

$$\operatorname{tg} y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a}}{a}.$$

Дискриминант стоящего слева квадратного трехчлена равен $a^2 - 2a$. Он неотрицателен, если $a \leq 0$ или $a \geq 2$. Значение $a = 0$ нужно исключить.

При остальных a ни $\operatorname{tg} x$, ни $\operatorname{tg} y$ не обращаются в нуль и существуют. Остается сделать проверку.

Ответ. Если $a < 0$ или $a \geq 2$, то

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a}}{2} + n\pi, \\ y = \operatorname{arctg} \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a}}{a} + k\pi, \end{cases}$$

где одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки.

13.37. Перенесем $\sin y$ и $\cos y$ в правую часть:

$$\begin{cases} \sin x = \sin \alpha - \sin y, \\ \cos x = \cos \alpha - \cos y. \end{cases}$$

Возведем каждое уравнение в квадрат и сложим:

$$1 = 2 - 2(\sin \alpha \sin y + \cos \alpha \cos y),$$

т. е. $\cos(y - \alpha) = \frac{1}{2}$. Таким образом, $y - \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

Аналогично найдем, что $x - \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

Система еще не решена, так как при возведении в квадрат могли быть приобретены посторонние корни. Чтобы сделать проверку, подставим $x = \alpha + 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ и $y = \alpha + 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ в данную систему:

$$\begin{cases} \sin\left(\alpha + 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha, \\ \cos\left(\alpha + 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что в этой записи не исключается возможность выбора произвольных комбинаций знаков плюс и минус для x и y .

Если в выражениях для x и y взять одинаковые знаки, например плюс, то получим систему

$$\begin{cases} 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha, \\ 2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha, \end{cases}$$

откуда следует

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg} \alpha,$$

что неверно при всех α .

Если взять разные знаки, то

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} = \sin \alpha,$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} = \cos \alpha,$$

т. е. каждое уравнение системы превращается в тождество.

Ответ.

$$\begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} + \alpha, \\ y = 2n\pi \mp \frac{\pi}{3} + \alpha, \end{cases}$$

где берутся или только верхние, или только нижние знаки.

Замечание. Найдя $y = a + 2\pi \pm \frac{\pi}{3}$, можно было искать x с помощью подстановки. Однако это не избавило бы нас от необходимости делать проверку, так как в процессе решения уравнения возводились в квадрат.

13.38. Первое уравнение перепишем в виде

$$\sin(x - y) - \cos(x + y) = 2a.$$

Из второго найдем

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos \left[2\arcsin \left(a + \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= 1 - 2\sin^2 \left[\arcsin \left(a + \frac{1}{2} \right) \right] = 1 - 2 \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} - 2a^2 - 2a. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sin(x - y) = 2a + \cos(x + y) = \frac{1}{2} - 2a^2 = \frac{1 - 4a^2}{2}.$$

Прежде чем решать систему

$$\begin{cases} x + y = 2 \arcsin \left(a + \frac{1}{2} \right), \\ \sin(x - y) = \frac{1 - 4a^2}{2}, \end{cases} \quad (1)$$

выясним, при каких a она имеет решение.

Первоначальная система накладывает на параметр a такие ограничения: $|a| \leq 1$, $\left| a + \frac{1}{2} \right| \leq 1$, где первое — следствие того, что в левой части первого уравнения стоит произведение синуса и косинуса, а второе — следствие определения арксинуса.

Поскольку при преобразованиях исходной системы равносильность не нарушалась, то нет необходимости учитывать первоначальные ограничения, так как они будут содержаться в ограничениях системы (1):

$$\begin{cases} \left| a + \frac{1}{2} \right| \leq 1, \\ \frac{|1 - 4a^2|}{2} \leq 1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

Итак, если параметр a лежит на интервале $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ то систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x+y=2\arcsin\left(a+\frac{1}{2}\right), \\ x-y=n\pi+(-1)^n\arcsin\frac{1-4a^2}{2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем x и y . Остается сделать проверку.

Ответ. При $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{1-4a^2}{2} + \arcsin\left(a + \frac{1}{2}\right), \\ y &= -\frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \arcsin \frac{1-4a^2}{2} + \arcsin\left(a + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

13.39. Обозначим $\operatorname{tg}^2 x = u$, $\operatorname{tg}^2 y = v$. Тогда в левой части уравнения получим $u^2 + v^2 + \frac{2}{uv}$. Это выражение не может быть меньше, чем $2uv + \frac{2}{uv}$, так как $u^2 + v^2 \geq 2uv$. Выражение $2uv + \frac{2}{uv}$ тоже легко оценить:

$$2\left(uv + \frac{1}{uv}\right) \geq 4,$$

причем равенство достигается лишь при $u=v=1$.

Таким образом, сумма, стоящая в левой части равенства, не может быть меньше 4, в то время как правая часть этого равенства не может превзойти 4. Остается единственная возможность: обе части равенства одновременно равны 4. Получаем систему

$$\begin{cases} \sin^2(x+y) = 1, \\ \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y = 1. \end{cases}$$

Второму уравнению удовлетворяют значения $x \approx \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y \approx \pm \frac{\pi}{4} + l\pi$, где знаки берутся в произвольных сочетаниях. Однако первое уравнение будет удовлетворяться только в том случае, когда в выражениях для x и y взяты одинаковые знаки.

Ответ.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \\ y = \frac{\pi}{4} + n\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \\ y = -\frac{\pi}{4} + n\pi. \end{cases}$$

13.40. Первый способ. Умножив $\sin^2 x$ на $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$ и сгруппировав члены, содержащие $\sin^2 3x$, получим

$$\sin^2 x \cos^2 3x + \sin^2 3x \left(\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4} \right) = 0,$$

или

$$\sin^2 x \cos^2 3x + \sin^2 3x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)^2 = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin x \cos 3x = 0, \\ \sin 3x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Корни первого уравнения найти нетрудно:

$$x_1 = n\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}.$$

Подставляя x_1 во второе уравнение, убеждаемся, что оно удовлетворяется при этих значениях неизвестного. Подставляя во второе уравнение x_2 , получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \right] = 0.$$

Так как первый сомножитель никогда не обращается в нуль, то последнее равенство можно записать так:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6}.$$

Воспользовавшись условием равенства синусов (если $\sin \alpha = \sin \beta$, то либо $\alpha - \beta = 2k\pi$, либо $\alpha + \beta = (2k+1)\pi$, получим

$$\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{3} = (2k+1)\pi, \quad \text{откуда } n = 6k + 2,$$

и

$$\frac{n\pi}{3} = 2k\pi, \quad \text{откуда } n = 6k.$$

Таким образом,

$$x_1 = n\pi,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Второй способ. Перепишем уравнение в виде

$$4 \sin^2 x - 4 \sin x \sin^2 3x + \sin^2 3x = 0,$$

т. е

$$(2 \sin x - \sin^2 3x)^2 + (\sin^2 3x - \sin^4 3x) \approx 0.$$

Так как оба слагаемых неотрицательны, то

$$\begin{cases} 2 \sin x = \sin^2 3x, \\ \sin^2 3x = |\sin 3x|. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим: либо $\sin 3x = 0$ и $x = \frac{\pi n}{3}$,

либо $|\sin 3x| = 1$ и $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$. Остается отобрать из этих решений те, которые удовлетворяют первому уравнению, что делается так же, как и в первом способе решения.

Ответ. $n\pi$; $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

13.41. Первый способ. Преобразовав данное уравнение к функциям от $\frac{x+y}{2}$ и $\frac{x-y}{2}$ и дополнив полученное таким образом выражение до полного квадрата, придем к уравнению вида

$$\left(2 \cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2}\right)^2 + \sin^2 \frac{x-y}{2} = 0.$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2 \cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, найдем

$$\frac{x-y}{2} = n\pi,$$

откуда $x-y = 2n\pi$, а $x = y + 2n\pi$.

Подставляя найденное выражение для x в первое уравнение, получим

$$2 \cos(y + n\pi) - \cos n\pi = 0.$$

Число n может быть либо четным, либо нечетным. Если $n = 2k$, то уравнение примет вид

$$2 \cos y - 1 = 0,$$

откуда $\cos y = \frac{1}{2}$.

Если $n = 2k + 1$, то уравнение запишется так:

$$-2 \cos y + 1 = 0,$$

откуда снова $\cos y = \frac{1}{2}$.

Таким образом,

$$y = 2\pi m \pm \frac{\pi}{3},$$

а $x = y + 2n\pi = 2\pi(n + m) \pm \frac{\pi}{3}$. В этом случае $n + m$ можно рассматривать как новое целочисленное переменное и записать ответ следующим образом:

$$\begin{cases} x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}, \\ y = 2\pi m \pm \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Второй способ. Преобразовав уравнение к виду $A \cos y + B \sin y = \frac{3}{2} - \cos x$, где $A = 1 - \cos x$, $B = \sin x$ (причем A и B не равны нулю одновременно), оценим его левую часть

$$\begin{aligned} A \cos y + B \sin y &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos y + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin y \right) \leq \\ &\leq \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x}. \end{aligned}$$

Чтобы данное уравнение имело решение, необходимо

$$(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq \left(\frac{3}{2} - \cos x \right)^2.$$

Раскрыв скобки, получим

$$\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} \leq 0,$$

т. е. $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$. Так как квадрат некоторого выражения не может быть отрицательным, то

$$\cos x = \frac{1}{2},$$

откуда $x = 2\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

Чтобы найти y , можно подставить найденные значения x в исходное уравнение. Однако достаточно заметить, что исходное уравнение симметрично относительно x и y . Следовательно, для второго неизвестного мы тоже получим

$$y = 2\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

Остается установить соответствие между найденными значениями x и y , что легко сделать проверкой, так как здесь нужно рассмотреть всего четыре различные возможности. Убеждаемся, что из четырех возможностей уравнению удовлетворяют только две, когда для x и y выбраны одинаковые знаки.

Ответ. $x = 2\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $y = 2\pi \pm \frac{\pi}{3}$, где берутся либо только верхние, либо только нижние знаки.

13.42. Первый способ. Задача сводится к отысканию таких a и b , при которых равенство

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} (a - x) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} (a - x) = b$$

является неабсолютным тождеством. Обозначив $\operatorname{tg} x = z$ и $\operatorname{tg} a = c$ (в предположении, что $a \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$), получим

$$z + \frac{c-z}{1+cz} + z \frac{c-z}{1+cz} = b.$$

Перенеся все в левую часть и приведя к общему знаменателю, получим в числителе выражение

$$z^2(c-1) + z(c-bc) + c-b,$$

которое должно обращаться в нуль при бесконечном множестве различных значений z , что равносильно тождественному равенству нулю многочлена. Так как условием тождественного равенства многочлена нулю является равенство

нулю всех его коэффициентов, то получаем $c=1$, $b=1$, т.е. $b=1$, $a=\pi/4 + k\pi$. Убеждаемся, что при этом знаменатель $1 + \operatorname{ctg} x \neq 0$. Случай $a = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ приводит к равенству $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = b - 1$, которое не является тождеством.

Второй способ. Равенство

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(a-x) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(a-x) = b$$

должно выполняться тождественно по отношению к x . Положим $x=0$ и $x=\frac{\pi}{4}$. Получим систему, которой должны удовлетворять a и b :

$$\operatorname{tg} a = b, \quad \operatorname{tg}\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{b-1}{2}.$$

Заменяя во втором уравнении $b = \operatorname{tg} a$ и преобразовывая левую часть, получим

$$\frac{\operatorname{tg} a - 1}{1 + \operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg} a - 1}{2},$$

откуда получим $\operatorname{tg} a = 1$. Таким образом, $b=1$, $a = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Проверкой убеждаемся, что при найденных значениях a и b написанное в начале решения равенство выполняется тождественно.

Ответ. $b=1$, $a = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

13.43. Оценим левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} & \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = \\ &= \sin^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + \cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x} + 4 = \\ &= \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 + \frac{4}{(1 - \cos 2x)^2} + \\ & \quad + \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2 + \frac{4}{(1 + \cos 2x)^2} + 4 = \\ &= \frac{7}{4}(2 + 2 \cos^2 2x) + \frac{4(2 + 2 \cos^2 2x)}{(1 - \cos 2x)^2 (1 + \cos 2x)^2} + 4 = \\ &= 4 + \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x) + \frac{8(1 + \cos^2 2x)}{(1 - \cos^2 2x)^2}. \end{aligned}$$

С увеличением $\cos^2 2x$ это выражение растет. Поэтому оно будет достигать своего минимума, когда $\cos^2 2x = 0$. Таким образом, левая часть уравнения не может стать меньше 12,5.

Поскольку правая часть не может превзойти 12,5, то получаем систему

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin y = 1. \end{cases}$$

Ответ.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi. \end{cases}$$

13.44. Представив данное уравнение в виде

$$\sin 2x - \sin x \cos 2x = \frac{3}{2},$$

оценим левую часть. Чтобы оценить выражение

$$A \sin 2x + B \cos 2x,$$

его нормируют, т. е. представляют в виде

$$\sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin 2x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos 2x \right),$$

Выражение, стоящее в скобках, можно записать как $\sin(2x + \alpha)$, т. е. оно не превосходит по абсолютной величине единицу. В нашем случае $A = 1$, $B = -\sin x$. Поэтому

$$\sin 2x - \sin x \cos 2x =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1 + \sin^2 x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \sin 2x - \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cos 2x \right) \leq \\ &\leq \sqrt{1 + \sin^2 x} \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Так как левая часть рассматриваемого уравнения не превосходит $\sqrt{2}$, а правая часть равна $\frac{3}{2}$; что больше $\sqrt{2}$, то данное уравнение не имеет корней.

Ответ. Нет решений.

Глава 14

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

14.1. Неравенство равносильно такому:

$$\sin^2 x > \cos^2 x,$$

т. е.

$$\cos^2 x - \sin^2 x < 0, \quad \cos 2x < 0,$$

откуда

$$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + n\pi.$

14.2. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x < -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) < -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. е.

$$\frac{3\pi}{4} + 2n\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + 2n\pi.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi.$

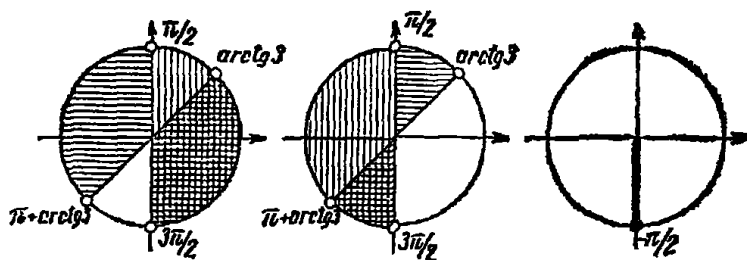


Рис. Р.14.3.

14.3. Первый способ. Неравенство $\sin x < 3 \cos x$ равносильно совокупности трех систем

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \operatorname{tg} x < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x < 0, \\ \operatorname{tg} x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x < 0. \end{cases}$$

Решение каждой из них изображено на рис. Р.14.3.

Второй способ. Запишем данное неравенство так:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{3 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} < 0.$$

При использовании этих формул мы исключили из области существования левой части неравенства точки, в которых $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не существует. Поэтому нужно подставить в исходное неравенство $x = \pi(2n + 1)$. Убеждаемся, что

$$\sin \pi(2n + 1) - 3 \cos \pi(2n + 1) = 3,$$

т. е. эти точки не являются корнями неравенства.

Приходим к квадратному неравенству

$$3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 < 0,$$

откуда

$$\frac{-1 - \sqrt{10}}{3} < \operatorname{tg} \frac{x}{2} < \frac{-1 + \sqrt{10}}{3}.$$

Третий способ. Найдём корни уравнения

$$\sin x - 3 \cos x = 0,$$

или

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Это — однородное уравнение. Оно равносильно уравнению относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 = 0.$$

Дальше решение аналогично второму способу.

Наиболее компактный ответ получается при решении неравенства первым способом.

Ответ. $\arctg 3 + \pi(2n - 1) < x < \arctg 3 + 2\pi n$.

14.4. Поскольку $\operatorname{tg} x$ входит в правую часть данного неравенства, замена $\sin 2x$ и $\cos 2x$ их выражениями через $\operatorname{tg} x$ приведет к равносильному неравенству. Обозначив $\operatorname{tg} x = y$,

получим

$$\frac{2(1-y^2)}{1+y^2} + \frac{2y}{1+y^2} > y.$$

Так как $1+y^2 > 0$, то это неравенство равносильно такому:

$$y^3 + 2y^2 - y - 2 < 0.$$

Сгруппировав первый член с третьим, а второй — с четвертым, разложим левую часть на множители:

$$(y+2)(y+1)(y-1) < 0.$$

Решения этого неравенства будут лежать в интервалах

$$y < -2, \quad -1 < y < 1,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} x < -2, \quad -1 < \operatorname{tg} x < 1.$$

$$\text{Ответ. } -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\operatorname{arctg} 2 + \pi n; \quad -\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

14.5. Первый способ. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \operatorname{tg} 2x \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \leq 0, \\ \operatorname{tg} 2x \geq 0. \end{cases}$$

Начнем со второго неравенства. При решении обеих систем нам понадобятся радиусы, на которых $\operatorname{tg} 2x = 0$ и $\operatorname{tg} 2x$ не существует, так как только в этих точках может произойти перемена знака. Эти радиусы нанесены на рис. Р.14.5, а и б, причем на первом горизонтальной штриховкой заштрихованы те секторы, где $\operatorname{tg} 2x < 0$, а на втором — остальные секторы круга. Остается в первом случае выбрать секторы, в которых $\cos x \geq 0$, а во втором — $\cos x \leq 0$.

Нанесем решения данного неравенства на общий чертеж (рис. Р.14.5, в), после чего можно записать ответ.

Второй способ. Воспользуемся формулой тангенса двойного угла и перепишем неравенство в виде

$$\frac{2 \cos x \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \leq 0.$$

Формула, которую мы применили, является неабсолютным тождеством, так как в результате ее использования из области определения левой части неравенства исчезают значения x , при которых $\cos x = 0$. Непосредственной подстановкой в исходное неравенство убеждаемся, что $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ — его корни. Отметив соответствующие радиусы на чертеже (рис. Р. 14.5, з), можем считать, что $\cos x \neq 0$, и решать неравенство

$$\frac{\sin x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \leq 0.$$

Когда $\sin x \geq 0$, получим, что $\operatorname{tg} x < -1$, $\operatorname{tg} x > 1$ (рис. Р. 14.5, б), а когда $\sin x \leq 0$, то $-1 < \operatorname{tg} x < 1$

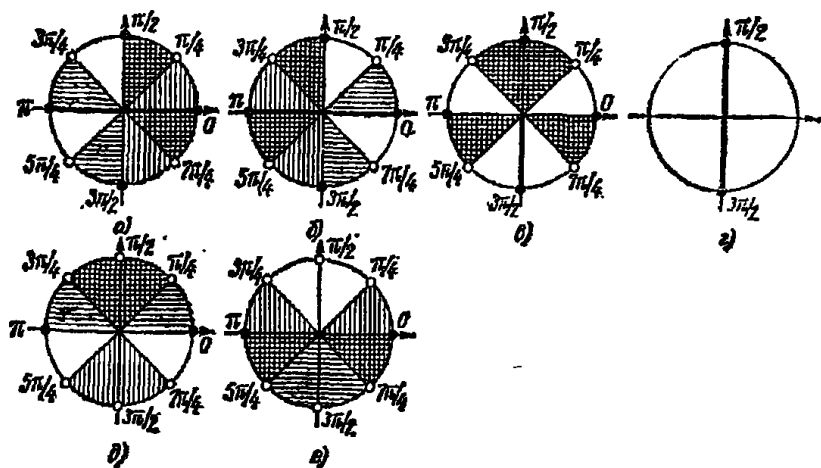


Рис. Р. 14.5.

(рис. Р. 14.5, е). Объединяя все решения на одном чертеже (не забывайте про рис. Р. 14.5, з), запишем окончательный ответ (см. рис. Р. 14.5, в).

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } \frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2n\pi; \quad \pi + 2n\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + \\ + 2n\pi; \quad \frac{7\pi}{4} + 2n\pi < x \leq 2(n+1)\pi; \quad x = \frac{\pi}{2} (4n+3). \end{aligned}$$

14.6. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$(1) \begin{cases} 5 + 2 \cos 2x \leq 3(2 \sin x - 1), \\ 2 \sin x - 1 \geq 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 5 + 2 \cos 2x \leq 3(1 - 2 \sin x), \\ 2 \sin x - 1 < 0. \end{cases}$$

Вначале решим первое неравенство первой системы. Выразим $\cos 2x$ через $\sin^2 x$, получим неравенство

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 5 \geq 0,$$

откуда

$$\sin x \leq -\frac{5}{2}, \quad \sin x \geq 1.$$

Поскольку первое неравенство не имеет решений, а второе выполняется только при $\sin x = 1$, первая система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2}, \\ \sin x = 1. \end{cases}$$

Решения этой системы совпадают с решениями уравнения $\sin x = 1$, т. е.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Перейдем ко второй системе и решим ее первое неравенство. Его можно записать в виде

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 \geq 0,$$

откуда

$$\sin x \leq -\frac{1}{2}, \quad \sin x \geq 2.$$

Так как второе из этой совокупности неравенств не имеет решений, то вторая система принимает вид

$$\begin{cases} \sin x \leq -\frac{1}{2}, \\ \sin x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Она эквивалентна неравенству

$$\sin x \leq -\frac{1}{2},$$

т. е.

$$-\frac{5}{6}\pi + 2n\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2n\pi.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; $-\frac{5}{6}\pi + 2n\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$.

14.7. Если $\cos x = 0$, то $\sin^2 x = 1$ и неравенство не удовлетворяется.

Поделим обе части неравенства на $\cos^2 x$ и обозначим $\operatorname{tg} x = y$. Получим алгебраическое неравенство

$$\sqrt{2}y^2 - 2y + 2 - \sqrt{2} < 0.$$

Разделив на $\sqrt{2}$, получим неравенство

$$y^2 - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 1 < 0,$$

откуда

$$\sqrt{2} - 1 < \operatorname{tg} x < 1.$$

Из интервалов, в которых лежит x :

$$\arctg(\sqrt{2} - 1) + n\pi < x < \frac{\pi}{4} + n\pi,$$

выбираем решения, лежащие в $(0, 2\pi)$.

Ответ. $\arctg(\sqrt{2} - 1) < x < \frac{\pi}{4}$;

$$\pi + \arctg(\sqrt{2} - 1) < x < \frac{5\pi}{4}.$$

14.8. Дискриминант трехчлена равен

$$(2 \cos \alpha - 1)^2 - 4 \cos^2 \alpha + 10 \cos \alpha - 4 = 6 \cos \alpha - 3.$$

Чтобы уравнение имело различные действительные корни, нужно потребовать

$$6 \cos \alpha - 3 > 0, \quad \text{т. е.} \quad \cos \alpha > \frac{1}{2}.$$

откуда $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{3}$ (в условии сказано, что $0 \leq \alpha \leq \pi$).

Свободный член сравним с нулем:

$$2 \cos^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 2 \nless 0.$$

Так как корнями трехчлена $2y^2 - 5y + 2$ будут числа $1/2$ и 2 , то свободный член будет положителен при $\cos \alpha < \frac{1}{2}$ и отрицателен при $\cos \alpha > \frac{1}{2}$. Мы уже выяснили, что должно иметь место второе неравенство; таким образом, исходное уравнение имеет корни разных знаков.

Поскольку $x_1 + x_2 = 2 \cos \alpha - 1$, что при $\cos \alpha > \frac{1}{2}$ больше нуля, то положительный корень имеет большую абсолютную величину.

Ответ. Данное уравнение имеет два различных действительных корня при $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{3}$. Эти корни имеют разные знаки, причем положительный корень больше по абсолютной величине.

14.9. Если $\sin x \geq 0$ и $\cos x \geq 0$, то данное неравенство равносильно такому:

$$\sin x + \cos x + 2\sqrt{\sin x \cos x} > 1. \quad (1)$$

Так как при $\sin x \geq 0$ и $\cos x \geq 0$ имеем

$$\sin x + \cos x \geq 1,$$

а при $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$ это неравенство становится строгим, то отсюда следует, что неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Ответ. $2\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi$.

14.10. Данное неравенство означает, что

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{1}{1+x^2} < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Если $k > 0$, то левое неравенство не имеет решений, поскольку $\frac{1}{1+x^2}$ не превосходит единицы. Если $k < 0$,

то не имеет решений правое неравенство, так как $\frac{1}{1+x^2}$ — величина положительная при всех x . Остается случай $k=0$. При $k=0$ правое неравенство удовлетворяется всегда. Решим левое неравенство.

$$|x| \leq \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \quad \text{и} \quad -\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \leq x \leq \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$$

$$\text{Ответ.} \quad -\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \leq x \leq \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$$

14.11. Так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, то, обозначив $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = y$, получим неравенство

$$\left(\frac{3\sqrt{2}y - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{2}y}\right)^{1/2} > 1, \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{3y-1}{2-y}\right)^{1/2} > 1.$$

Это неравенство равносильно такому:

$$\frac{3y-1}{2-y} > 1, \quad \text{или} \quad \frac{4y-3}{2-y} > 0.$$

Так как y не превосходит 1, то $2-y > 0$. Поэтому $y > \frac{3}{4}$.

Решением неравенства $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{3}{4}$ будут значения $x - \frac{\pi}{4}$, лежащие между $2k\pi - \arccos \frac{3}{4}$ и $2k\pi + \arccos \frac{3}{4}$.

$$\text{Ответ.} \quad 2k\pi + \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{3}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{3}{4}.$$

14.12. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{\sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x}{\cos x \cos 3x} < 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\cos 2x}{\cos x \cos 3x} < 0.$$

Преобразуем знаменатель

$$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{2} (\cos 2x + 2 \cos^2 2x - 1)$$

и введем обозначение $\cos 2x = y$. Получим

$$\frac{2y}{2y^2 + y - 1} < 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{y}{(y+1)\left(y - \frac{1}{2}\right)} < 0,$$

откуда $y < -1$, $0 < y < \frac{1}{2}$ и, наконец, $0 < \cos 2x < \frac{1}{2}$.

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + n\pi < x < -\frac{\pi}{6} + n\pi;$

$$\frac{\pi}{6} + n\pi < x < \frac{\pi}{4} + n\pi.$$

14.13. Пусть $y = \cos x$, где $|y| \leq 1$. Выражение $\frac{17}{7} - \cos x$ всегда положительно. Поэтому обе части данного неравенства можно возвести в квадрат; получим равносильное неравенство

$$\sqrt{1+2y} \sqrt{y} > \frac{5}{7} - 2y.$$

Когда правая часть отрицательна, приходим к системе

$$\begin{cases} \frac{5}{7} - 2y < 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

решением которой будут значения $y > \frac{5}{14}$.

Когда правая часть неотрицательна, то получим другую систему:

$$\begin{cases} \frac{5}{7} - 2y \geq 0, \\ (1+2y)y > \left(\frac{5}{7} - 2y\right)^2, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Второе неравенство этой системы можно переписать в виде

$$2 \cdot 49y^2 - 7 \cdot 27y + 25 < 0,$$

откуда

$$\frac{1}{7} < y < \frac{25}{14}, \text{ т. е. } y > \frac{1}{7}, \text{ так как } y = \cos x.$$

Решения всей системы будут лежать в интервале

$$\frac{1}{7} < y \leq \frac{5}{14}.$$

Объединяя его с интервалом $y > \frac{5}{14}$, получим $y > \frac{1}{7}$.

Ответ. $-\arccos \frac{1}{7} + 2n\pi < x < \arccos \frac{1}{7} + 2n\pi.$

14.14. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и обозначим $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$. Придем к неравенству

$$y > \frac{y^2 + y - 1}{-y^2 + y + 1},$$

которое равносильно исходному. В самом деле, замена $\sin x$ и $\cos x$ их выражениями через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ может привести к потере решений, так как $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ перестает существовать в тех точках, в которых $\sin x$ и $\cos x$ существуют. Однако $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ входит в первоначальное неравенство, а потому эти точки исключены с самого начала. Сокращение числителя и знаменателя на $y^2 + 1$, очевидно, не приводит ни к потере, ни к приобретению корней, так как $y^2 + 1 \neq 0$ и y не исчез полностью из неравенства.

Неравенство относительно y перепишем в виде

$$y + \frac{y^2 + y - 1}{y^2 - y - 1} > 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{y^3 - 1}{y^2 - y - 1} > 0.$$

После разложения левой части на множители получим

$$\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{\left(y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(y - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} > 0,$$

$$\text{откуда} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2} < 1, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Находим интервалы изменения x :

$$-2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi.$$

Остается выделить решения, лежащие в интервале $0 < x < \pi$.

$$\text{Ответ.} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}+1}{2} < x < \pi.$$

14.15. Выразив $\sin 3\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\sin \alpha$ и обозначив $\sin \alpha = y$, получим

$$4(3y - 4y^3) + 5 \geq 4 - 8y^2 + 5y,$$

или

$$16y^3 - 8y^2 - 7y - 1 \leq 0.$$

Нетрудно заметить, что $y = 1$ — корень многочлена, стоящего в левой части неравенства. Теперь можно разложить этот многочлен на множители:

$$16y^3 - 8y^2 - 7y - 1 = (y - 1)(4y + 1)^2.$$

Так как $y = \sin \alpha$, то $y - 1 \leq 0$, а следовательно, и многочлен $16y^3 - 8y^2 - 7y - 1$ неположителен, что доказывает неравенство.

Г л а в а 15

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

15.1. Данное неравенство равносильно такому:

$$(\log_{\sin x} 2)^2 < 2 \log_{\sin x} 2 + 3.$$

Обозначив $\log_{\sin x} 2 = y$, получим

$$y^2 - 2y - 3 < 0,$$

откуда

$$-1 < y < 3,$$

или

$$-1 < \log_{\sin x} 2 < 3.$$

Последнее неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin x} > 2 > \sin^3 x, \\ \sin x > 0, \\ \sin x \neq 1. \end{cases}$$

Первое из неравенств системы можно переписать так:

$$0 < \sin x < \frac{1}{2}.$$

Ответ. $2n\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi$.

15.2. Данное неравенство равносильно такому:

$$(\log_{\lg x} 3)^2 \leq \log_{\lg x} 3 + 2,$$

т. е.

$$-1 \leq \log_{\operatorname{tg} x} 3 \leq 2$$

Последнее неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ \frac{1}{\operatorname{tg} x} \leq 3 \leq \operatorname{tg}^2 x; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \frac{1}{\operatorname{tg} x} \geq 3 \geq \operatorname{tg}^2 x. \end{cases}$$

Каждая из этих систем после несложных преобразований принимает вид

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ \operatorname{tg} x \geq 1/3, \\ \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \operatorname{tg} x \leq 1/3, \\ \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}. \end{cases}$$

Первая система равносильна неравенству $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$, а вторая — неравенству $0 < \operatorname{tg} x \leq 1/3$.

Ответ. $n\pi < x \leq \arctg \frac{1}{3} + n\pi$; $\frac{\pi}{3} + n\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + n\pi$.

15.3. Так как выражения, стоящие под знаками логарифмов, должны быть положительными, то указанный в условии интервал можно сузить: $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x > \operatorname{tg} x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos^2 x > \sin x. \end{cases}$$

Второе неравенство перепишем в виде

$$\sin^2 x + \sin x - 1 < 0,$$

откуда

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < \sin x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Учитывая, что в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$ должно быть $\sin x > 0$, получим

$$0 < \sin x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ. $0 < x < \arcsin \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

15.4. Данное неравенство можно переписать так:

$$\log_2 \cos 2x + \log_2 \sin x + \log_2 \cos x + \log_2 8 < 0,$$

т. е.,

$$\begin{cases} 8 \cos 2x \sin x \cos x < 1, \\ \cos 2x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Первое неравенство можно переписать в виде

$$\sin 4x < \frac{1}{2}.$$

Два последних неравенства требуют, чтобы подвижный радиус угла x лежал в первой четверти, а неравенство

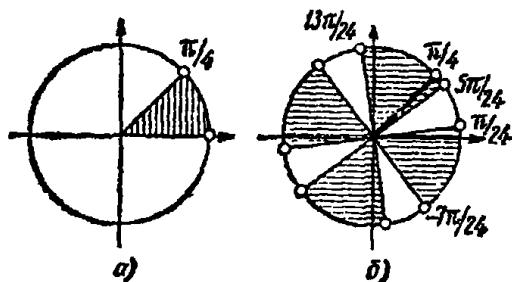


Рис. P.15.4.

$\cos 2x > 0$ сужает эту область до первой половины первой четверти (на рис. P.15.4, а — заштрихованный сектор).

Остается выбрать решения неравенства $\sin 4x < \frac{1}{2}$, лежащие в этих промежутках. Все решения неравенства $\sin 4x < \frac{1}{2}$ можно записать в виде

$$-\frac{7\pi}{6} + 2n\pi < 4x < \frac{\pi}{6} + 2n\pi,$$

т. е.

$$-\frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}$$

(рис. P.15.4, а). В интересующий нас интервал $0 < x < \pi/4$ из этой серии частично попадут лишь два интервала: $-7\pi/24 < x < 13\pi/24$ (рис. P.15.4, б). Теперь нетрудно написать окончательный ответ.

Ответ. $2n\pi < x < \frac{\pi}{24} + 2n\pi$; $\frac{5\pi}{24} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2n\pi$.

15.5. Вместо данного неравенства можно написать

$$0 < |\cos x + \sqrt{3} \sin x| < 1,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} -1 < \cos x + \sqrt{3} \sin x < 1, \\ \cos x + \sqrt{3} \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Так как $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, то получим

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0. \end{cases}$$

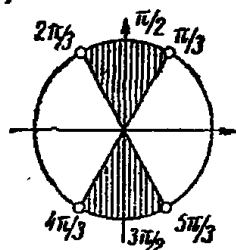


Рис. Р.15.5.

В условии сказано, что $0 \leq x \leq 2\pi$, поэтому $x - \frac{\pi}{3}$ нужно искать в интервале

$$-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi - \frac{\pi}{3}.$$

На рис. Р.15.5 изображено расположение на тригонометрическом круге значений $y = x - \frac{\pi}{3}$, удовлетворяющих последней системе, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{4\pi}{3} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6} < x < \pi,$
 $\frac{5\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6}, \quad \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi.$

15.6. Неравенство можно переписать так:

$$\cos\left(|\lg x| - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2},$$

откуда

$$-\frac{\pi}{3} + 2n\pi < |\lg x| - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + 2n\pi,$$

т. е.

$$-\frac{\pi}{12} + 2n\pi < |\lg x| < \frac{7\pi}{12} + 2n\pi.$$

При $n < 0$ не удовлетворяется правое неравенство.

При $n=0$: $|\lg x| < \frac{7\pi}{12}$, т. е. $-\frac{7\pi}{12} < \lg x < \frac{7\pi}{12}$, а потому $10^{-\frac{7\pi}{12}} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}}$.

При $n=1, 2, 3 \dots$: $-\frac{\pi}{12} + 2n\pi < \lg x < \frac{7\pi}{12} + 2n\pi$ и $-\frac{7\pi}{12} - 2n\pi < \lg x < \frac{\pi}{12} - 2n\pi$.

Ответ. $10^{-\frac{7\pi}{12}} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}}$, $10^{-\frac{\pi}{12} + 2n\pi} < x < 10^{\frac{7\pi}{12} + 2n\pi}$ и $10^{-\frac{7\pi}{12} - 2n\pi} < x < 10^{\frac{\pi}{12} - 2n\pi}$, $n=1, 2, 3, \dots$

15.7. Так как $\arccos(x^2 - 3x + 2) \geq 0$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 8x^2 - 10x + 3 > 0, \\ \arccos(x^2 - 3x + 2) \neq 0, \\ \arccos(x^2 - 3x + 2) \text{ существует.} \end{cases}$$

Другими словами,

$$\begin{cases} 8x^2 - 10x + 3 > 0, \\ -1 \leq x^2 - 3x + 2 < 1. \end{cases}$$

Решаем каждое из трех неравенств системы:

$$\begin{cases} 8x^2 - 10x + 3 > 0, \\ x^2 - 3x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 1 < 0. \end{cases}$$

Дискриминант второго неравенства отрицателен, а потому оно удовлетворяется при всех x . Остаются первое и третье:

$$\begin{aligned} x < \frac{1}{2}, \quad x > \frac{3}{4}, \\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

15.8. Если $1 - x \leq 0$, то неравенство не удовлетворяется, так как

$$\arccos(1 - x) \geq \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } 1 - x \leq 0,$$

в то время как $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$ всегда меньше $\frac{\pi}{2}$. При $1 - x > 0$ обе части неравенства оказываются в интервале от 0 до $\frac{\pi}{2}$, где все тригонометрические функции монотонны. Так как косинус в интервале от 0 до $\frac{\pi}{2}$ убывает, то данное неравенство равносильно такому:

$$\cos(\operatorname{arctg} \sqrt{x}) < \cos(\arccos(1 - x))$$

(большему углу соответствует меньший косинус). Чтобы $\arccos(1 - x)$ существовал, необходимо $1 - x \leq 1$. Вспоминая, что $1 - x > 0$, получим, что $0 \leq x < 1$.

Вычислим $\cos(\operatorname{arctg} \sqrt{x})$:

$$\cos(\operatorname{arctg} \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} \sqrt{x})}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}.$$

Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x}} < 1-x, \\ 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Так как $0 \leq x < 1$, то система равносильна такой:

$$\begin{cases} 1 < (1-x)^2(1+x), \\ 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Раскрыв скобки, запишем первое неравенство так: $x^3 - x^2 - x > 0$, или $x(x^2 - x - 1) > 0$. При $x = 0$ это неравенство не удовлетворяется, а при $x > 0$ — равносильно неравенству $x^2 - x - 1 > 0$. Трехчлен, стоящий в левой части, можно записать так: $x(x-1)-1$. Поскольку $x > 0$, а $x-1 < 0$, то этот трехчлен отрицателен.

Ответ. Нет решений.

Глава 16

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

16.1. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим немедленно следует, что

$$\frac{1}{x^2} + x^2 \geq 2.$$

Однако левая часть уравнения не может стать больше двух. Поэтому остается лишь одна возможность:

$$\begin{cases} 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{6} = 2, \\ \frac{1}{x^2} + x^2 = 2. \end{cases}$$

Последнее равенство достигается лишь при $x^2 = 1$, т. е. $x = \pm 1$. Подставляя эти значения в левую часть первого уравнения, получим

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{6} < 2.$$

Таким образом, исходное уравнение не имеет решений.

16.2. Так как $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$, то уравнение можно переписать в виде

$$2^{2^{\operatorname{tg}^2 x}} + 2 \cdot 2^{\operatorname{tg}^2 x} - 80 = 0,$$

откуда

$$2^{\operatorname{tg}^2 x} = 8, \quad \operatorname{tg}^2 x = 3, \quad \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3}, \quad x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(второе уравнение $2^{\operatorname{tg}^2 x} = -10$ не имеет решений).

Ответ. $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

16.3. Так как в условие одновременно входят $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, то мы можем воспользоваться неабсолютным тождеством

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

не опасаясь нарушения равносильности. Получим уравнение

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{tg} x)^{-\cos x}.$$

Если $\operatorname{tg} x < 0$, то $\sin x$ и $\cos x$ — дробные числа, и обе части равенства теряют смысл. При $\operatorname{tg} x = 0$ и $\sin x$ обращается в нуль, т. е. левая часть теряет смысл.

Если $\operatorname{tg} x > 0$, но $\neq 1$, то $\sin x = -\cos x$, откуда $\operatorname{tg} x < 0$, что противоречит сделанному предположению. Остается $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$.

Ответ. $\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

16.4. Данное уравнение можно записать так:

$$\sin(2^x + 2^{x-1}) = \frac{1}{2},$$

откуда

$$2^x + 2^{x-1} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6},$$

или

$$2^x = \frac{2}{3}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{9}.$$

Какое бы положительное число ни стояло в правой части, уравнение будет иметь решение.

Неравенство

$$\frac{2}{3}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{9} > 0$$

выполняется при $n \geq 0$.

Ответ. $\log_2 \left[\frac{2}{3}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{9} \right]$, где $n \geq 0$.

16.5. Уравнение можно переписать так:

$$\lg \sin x + \lg \sin 5x + \lg \cos 4x = 0,$$

или в виде системы

$$\begin{cases} \sin x \sin 5x \cos 4x = 1, \\ \sin x > 0, \\ \sin 5x > 0, \\ \cos 4x > 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $|\sin x| = 1$, $|\sin 5x| = 1$, $|\cos 4x| = 1$ одновременно. С учетом ограничений придем

к системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 5x = 1, \\ \cos 4x = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Подставляем во второе и третье уравнения:

$$\begin{aligned} \sin \left[5 \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \right] &= \sin \frac{\pi}{2} = 1, \\ \cos \left[4 \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \right] &= \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

16.6. Обозначив $\lg(\sin x + 4) = y$, получим уравнение

$$y^2 + 2y - \frac{5}{4} = 0,$$

у которого два корня: $y_1 = -\frac{5}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

Для первого корня получим

$$\lg(\sin x + 4) = -\frac{5}{2},$$

откуда

$$\sin x = 10^{-\frac{5}{2}} - 4.$$

Так как $10^{-\frac{5}{2}} - 4 < -1$, то соответствующих значений x нет.

Для второго корня получим

$$\lg(\sin x + 4) = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\sin x = \sqrt{10} - 4.$$

Так как $-1 < \sqrt{10} - 4 < 1$, то можем найти x .

Ответ. $\pi k + (-1)^k \arcsin(\sqrt{10} - 4)$.

16.7. Данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{4} \cos x = \sin^3 x, \\ \sin x - \frac{1}{4} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \sin x \neq 1. \end{cases}$$

Уравнение можно преобразовать, если сгруппировать $\sin x$ и $\sin^3 x$:

$$\sin x (1 - \sin^2 x) - \frac{1}{4} \cos x = 0,$$

или

$$\sin x \cos^2 x - \frac{1}{4} \cos x = 0.$$

Так как $\sin x > 0$, то $\cos^2 x < 1$, и любое решение уравнения

$$\sin x \cos^2 x - \frac{1}{4} \cos x = 0$$

удовлетворяет неравенству

$$\sin x - \frac{1}{4} \cos x > 0.$$

Запишем уравнение в виде

$$\cos x \left(\sin 2x - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Так как $\sin x \neq 1$ и $\sin x > 0$, то $\cos x \neq 0$. Остается

$$\sin 2x = \frac{1}{2},$$

откуда

$$x_1 = \pi n + \frac{\pi}{12},$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} (2n + 1) - \frac{\pi}{12}.$$

Из всех ограничений осталось удовлетворить только одному: $\sin x > 0$. Чтобы добиться этого, нужно для x_1 и x_2 взять $n = 2k$.

Ответ. $2\pi k + \frac{\pi}{12}$; $2\pi k + \frac{5\pi}{12}$.

16.8. Данное уравнение равносильно системе.

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{8 \cos^2 x}, \\ \cos^2 x \neq \frac{1}{8}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x = \sqrt{8} |\cos x|, \\ \cos^2 x \neq \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Условие, что $\sin x > 0$, входит в уравнение, так как справа стоит всегда неотрицательное число, а если $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$.

Рассмотрим следствие исходного уравнения

$$\sin x = \pm \sqrt{8} \cos x,$$

а в конце проверим выполнение условий: $\sin x > 0$ и $\cos^2 x \neq \frac{1}{8}$. Получим

$$\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{8}, \quad x = n\pi \pm \operatorname{arctg} \sqrt{8}.$$

Если $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{8}$, то $\operatorname{tg}^2 x + 1 = 9$ и $\cos^2 x = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{8}$.

Чтобы проверить выполнение условия $\sin x > 0$, рассмотрим два случая.

Если $n = 2k$, то $x = 2k\pi \pm \operatorname{arctg} \sqrt{8}$. Это — углы, лежащие в первой и четвертой четвертях; условие $\sin x > 0$ выполняется лишь для тех из них, которые лежат в первой четверти: $x_1 = 2k\pi + \operatorname{arctg} \sqrt{8}$.

Если $n = 2k + 1$, то $x = 2k\pi + \pi \pm \operatorname{arctg} \sqrt{8}$. Здесь нужно выбрать знак минус, так как только тогда мы получаем угол, лежащий во второй четверти.

Ответ. $2k\pi + \operatorname{arctg} \sqrt{8}$; $(2k + 1)\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{8}$.

16.9. Данное уравнение эквивалентно такому:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{4k+1}{20}.$$

Так как $x > 0$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ заключено между нулем и единицей. Следовательно,

$$0 < \frac{4k+1}{20} < 1,$$

откуда $0 \leq k \leq 4$.

Для каждого из этих k находим соответствующее значение x ,

Ответ. $\log_2 \frac{20}{4k+1}$, где $k=0, 1, 2, 3, 4$.

16.10. Решаем квадратное уравнение

$$\lg \cos x = -1 \pm \sqrt{-m^2 - 2m + 4}.$$

Стоящее под корнем выражение неотрицательно, если $-1 - \sqrt{5} \leq m \leq -1 + \sqrt{5}$.

Делаем следующий шаг:

$$\cos x = 10^{-1 \pm \sqrt{-m^2 - 2m + 4}}$$

Когда перед корнем взят минус, то стоящее справа положительное выражение не превзойдет единицы, а потому может быть косинусом. Когда перед корнем поставлен плюс, нужно, чтобы

$$-1 + \sqrt{-m^2 - 2m + 4} \leq 0, \quad \text{т. е.} \quad \sqrt{-m^2 - 2m + 4} \leq 1.$$

После возведения в квадрат это даст нам систему

$$\begin{cases} -m^2 - 2m + 3 \leq 0, \\ -m^2 - 2m + 4 \geq 0, \end{cases}$$

у которой два интервала решений:

$$-1 - \sqrt{5} \leq m \leq -3, \quad 1 \leq m \leq -1 + \sqrt{5}.$$

Ответ. При $-1 - \sqrt{5} \leq m \leq -3$, $x = 2\pi \pm \arccos A$,
при $-1 - \sqrt{5} \leq m \leq -3$ и $1 \leq m \leq -1 + \sqrt{5}$
 $x = 2\pi \pm \arccos B$, где

$$A = 10^{-1 - \sqrt{-m^2 - 2m + 4}}, \quad B = 10^{-1 + \sqrt{-m^2 - 2m + 4}}$$

16.11. Решаем квадратное уравнение относительно $\lg \sin x$:

$$\lg \sin x = a \pm \sqrt{2a^2 - 2}.$$

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $2a^2 - 2 \geq 0$, т. е. $a \leq -1$, $a \geq 1$.

Поскольку

$$\sin x = 10^{a \pm \sqrt{2a^2 - 2}},$$

то правая часть не должна превосходить единицу, а потому $a \pm \sqrt{2a^2 - 2} \leq 0$.

Когда $a \geq 1$, нужно рассмотреть лишь неравенство

$$a - \sqrt{2a^2 - 2} \leq 0,$$

откуда (с учетом ограничения $a \geq 1$) получаем $a \geq \sqrt{2}$. Если же $a \leq -1$, то $a - \sqrt{2a^2 - 2}$ всегда отрицательное число, а чтобы и число $a + \sqrt{2a^2 - 2}$ было неположительным, должно быть также $a \geq -\sqrt{2}$.

Ответ. При $a \leq -\sqrt{2}$ $x = n\pi + (-1)^n \arcsin 10^a \pm \sqrt{2a^2 - 2}$,

при $-\sqrt{2} \leq a \leq -1$ и при $a \geq \sqrt{2}$

$$x = n\pi + (-1)^n \arcsin 10^{a - \sqrt{2a^2 - 2}},$$

при $-1 < a < \sqrt{2}$ решений нет.

6.12. Данная система равносильна такой:

$$\begin{cases} 2x - y = 3x - 4y - 15, \\ 2x - y > 0, \\ 3x - 4y - 15 > 0, \\ 3x - 4y - 15 \neq 1, \\ \cos[\pi(x + y)] = 1, \\ x + 2y > 0, \\ x + 2y \neq 1. \end{cases}$$

Решая входящие сюда два уравнения, получим

$$\begin{cases} x + y = 2n, \\ x - 3y = 15, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{6n + 15}{4}, \quad y = \frac{2n - 15}{4}.$$

Из первого уравнения большой системы следует, что второе и третье неравенства выполняются одновременно. Поэтому достаточно потребовать

$$2\left(\frac{6n + 15}{4}\right) - \frac{2n - 15}{4} > 0, \quad \text{т. е.} \quad n > -\frac{9}{2} \quad \text{или} \quad n \geq -4.$$

Аналогично убеждаемся, что условие $3x - 4y - 15 \neq 1$ выполняется при $n \neq -\frac{41}{10}$, т. е. всегда, ибо n — целое.

Неравенство $x + 2y > 0$ справедливо при всех $n > 1,5$, т. е. $n \geq 2$, а условие $x + 2y \neq 1$ выполняется при $n \neq 1,9$, т. е. всегда.

Ответ.

$$\begin{cases} x = \frac{6n+15}{4}, \\ y = \frac{2n-15}{4}, \end{cases} \quad \text{где } n = 2, 3, 4, \dots$$

Г л а в а 17

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

17.1. Первый способ. Пусть $z_1 = x + yi$ и $z_2 = u + vi$. Нужно доказать, что

$$|(x+u) + i(y+v)| \leq |x+yi| + |u+vi|$$

при любых x, y, u, v .

Предположим противное:

$$\sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2} > \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{u^2 + v^2}.$$

После возведения обеих частей неравенства в квадрат (заметим, что обе части неравенства неотрицательны) и приведения подобных получим

$$xu + yv > \sqrt{(x^2 + y^2)(u^2 + v^2)}.$$

Если это неравенство верно, то его левая часть положительна, а потому его можно повторно возвести в квадрат. Получим

$$x^2v^2 + y^2u^2 - 2xuyv < 0,$$

т. е.

$$(xv - yu)^2 < 0,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает сформулированное утверждение.

Второй способ. Пусть z_1 и z_2 (на рис. Р.17.1 числу z_1 соответствует точка A , а числу z_2 — точка B) два произвольных комплексных числа. В силу неравенства треугольника $OC \leq OA + AC = OA + OB$, т. е. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

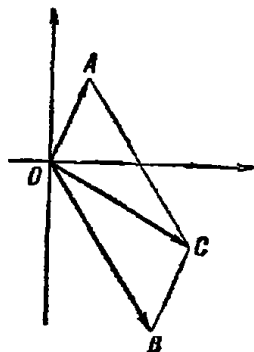


Рис. Р.17.1.

17.2. Пусть $z = a + bi$. Тогда

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(a-1) + bi}{(a+1) + bi}.$$

Умножим числитель и знаменатель на число, комплексно сопряженное знаменателю:

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{((a-1) + bi)((a+1) - bi)}{(a+1)^2 + b^2}.$$

Действительная часть числа $\frac{z-1}{z+1}$ будет равна $\frac{a^2-1+b^2}{(a+1)^2+b^2}$, а мнимая часть $\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}$. Поэтому, $\frac{z-1}{z+1}$ будет чисто мнимым числом тогда и только тогда, когда $a^2-1+b^2=0$, $2b \neq 0$, $(a+1)^2+b^2 \neq 0$. Третье из этих условий является следствием второго. Если $b=0$ и $a^2-1+b^2=0$, то $z=a=\pm 1$, что противоречит условию. Поэтому остается только одно требование: $a^2+b^2=1$, т. е. $|z|=1$.

17.3. Применим формулу Муавра

$$\begin{aligned} z^2 - z &= \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi - \cos \varphi - i \sin \varphi = \\ &= (\cos 2\varphi - \cos \varphi) + i (\sin 2\varphi - \sin \varphi). \end{aligned}$$

Преобразуем действительную и мнимую части в произведение

$$\begin{aligned} z^2 - z &= -2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(-\sin \frac{3\varphi}{2} + i \cos \frac{3\varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как $\sin^2 \frac{3\varphi}{2} + \cos^2 \frac{3\varphi}{2} = 1$, то $\left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right|$ будет модулем числа $z^2 - z$. Рассмотрим два случая, позволяющих определить знак $\sin \frac{\varphi}{2}$.

Если $4n\pi < \varphi < 2\pi + 4n\pi$, то $\left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \sin \frac{\varphi}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} z^2 - z &= 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\sin \left(-\frac{3\varphi}{2} \right) + i \cos \left(-\frac{3\varphi}{2} \right) \right] = \\ &= 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

В этом случае аргумент числа $z^2 - z$ равен $\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2} + 2k\pi$.

Если $2\pi + 4n\pi < \varphi < 4\pi + 4n\pi$, то $\left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = -\sin \frac{\varphi}{2}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} z^2 - z &= -2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{3\varphi}{2} - i \cos \frac{3\varphi}{2} \right) = \\ &= -2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

и аргумент $z^2 - z$ равен $\frac{3\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2} + 2k\pi$.

$$\text{Ответ.} \quad \arg(z^2 - z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2} + 2k\pi, & \text{если } 4n\pi < \varphi < 2\pi + 4n\pi, \\ \frac{3\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2} + 2k\pi, & \text{если } 2\pi + 4n\pi < \varphi < 4\pi + 4n\pi. \end{cases}$$

17.4. Преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\begin{aligned} 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + i \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

В квадратных скобках стоит комплексное число, записанное в тригонометрической форме. Поэтому

$$z = 2^n \sin^n \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(n \frac{\pi - \alpha}{2} \right) + i \sin \left(n \frac{\pi - \alpha}{2} \right) \right].$$

Так как нуль не может быть представлен в тригонометрической форме, то $\alpha \neq 2\pi m$.

Если $n = 2k$, то $2^n \sin^n \frac{\alpha}{2} > 0$, и тригонометрическая форма числа z получена.

Если $n = 2k + 1$, то нужно рассмотреть случаи, позволяющие определить знак $\sin \frac{\alpha}{2}$. Когда $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$, т. е. $4\pi m < \alpha < 2\pi(2m + 1)$, то найденное выражение снова есть тригонометрическая форма числа z . Когда $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$, т. е. $2\pi(2m - 1) < \alpha < 4\pi m$, придется сделать дальнейшие преобразования:

$$\begin{aligned} z &= -2^n \sin^n \frac{\alpha}{2} \left[-\cos \left(n \frac{\pi - \alpha}{2} \right) - i \sin \left(n \frac{\pi - \alpha}{2} \right) \right] = \\ &= -2^n \sin^n \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(\pi + n \frac{\pi - \alpha}{2} \right) + i \sin \left(\pi + n \frac{\pi - \alpha}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

что уже является тригонометрической формой числа z .

Ответ.

$$2^n \sin^n \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(n \frac{\pi - \alpha}{2} \right) + i \sin \left(n \frac{\pi - \alpha}{2} \right) \right],$$

если либо $n = 2k, \alpha \neq 2\pi m$
либо $n = 2k + 1, 4\pi m < \alpha < 2\pi(2m + 1)$;

$$-2^n \sin^n \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(\pi + n \frac{\pi - \alpha}{2} \right) + i \sin \left(\pi + n \frac{\pi - \alpha}{2} \right) \right],$$

если $n = 2k + 1, 2\pi(2m - 1) < \alpha < 4\pi m$.

17.5. Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-1} = \\ &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{r} = \\ &= \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + \left(r - \frac{1}{r} \right) i \sin \varphi. \end{aligned}$$

Это выражение равно действительному числу a . Следовательно,

$$\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi = 0.$$

Однако в условии сказано, что z — число мнимое. Поэтому $\sin \varphi \neq 0$. Остается

$$r - \frac{1}{r} = 0, \quad \text{откуда} \quad r^2 = 1, \quad r = 1.$$

Условие $z + \frac{1}{z} = a$ теперь упростилось и приняло вид простого тригонометрического уравнения

$$2 \cos \varphi = a,$$

откуда находим φ и ограничения на a .

Ответ. $r = 1, \varphi = \pm \arccos \frac{a}{2} + 2\pi k$ при $-2 \leq a < 0$.

17.6. По условию z удовлетворяет уравнению $z^2 - z + 1 = 0$, т. е. $z^3 = -1$. Поскольку

$$z^{167} = (z^3)^{55} \cdot z^2 = -z^2,$$

то нужно вычислить значение выражения

$$-z^2 - \frac{1}{z^2} = -\left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right).$$

Возведем уравнение $z + \frac{1}{z} = 1$ в квадрат и найдем, что

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = -1.$$

Ответ. 1.

17.7. Мы знаем, что $|\bar{z}| = |z|$, а данное в условии равенство дает нам еще одно соотношение

$$|\bar{z}| = |z^{n-1}|.$$

Так как $|z^{n-1}| = |z|^{n-1}$, то $|z| = |z|^{n-1}$, откуда либо $|z| = 0$, (если $n \neq 1$), и тогда $z = 0$, либо $|z| = 1$.

В последнем случае умножим данное в условии равенство на z :

$$z \cdot \bar{z} = z^n.$$

Так как $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$, то

$$z^n = 1, \quad z = \sqrt[n]{\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}.$$

Ответ. $z = 0$ (если $n \neq 1$), $z = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

17.8. Положим $z = x + yi$, тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а уравнение примет вид

$$(x + yi) \sqrt{x^2 + y^2} + a(x + yi) + 1 = 0.$$

Приравнявая нулю действительную и мнимую части, придем к системе

$$\begin{cases} x \sqrt{x^2 + y^2} + ax = 0, \\ y \sqrt{x^2 + y^2} + ay + 1 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение можно записать в виде $x(\sqrt{x^2 + y^2} + a) = 0$.

Если $x = 0$, то второе уравнение будет таким:

$$y|y| + ay + 1 = 0.$$

Когда $y \geq 0$, получим уравнение

$$y^2 + ay + 1 = 0,$$

оба решения которого $y_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ либо не суще-

ствуют, либо, отрицательны, так как по условию $a \geq 0$. Это противоречит предположению, что $y \geq 0$. Следовательно, при $y \geq 0$ решений нет.

Когда $y < 0$, получим уравнение

$$y^2 - ay - 1 = 0$$

с корнями $y_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$.

Так как $a \geq 0$, то условию $y < 0$ удовлетворяет только один корень $y_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} < 0$

Получаем решение данного уравнения

$$z = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} i.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $\sqrt{x^2 + y^2} + a = 0$. Поскольку $a \geq 0$, то это равенство возможно лишь при $x = y = a = 0$. Однако при этом второе уравнение системы

$$y \sqrt{x^2 + y^2} + ay + 1 = 0$$

не удовлетворяется.

Ответ. $z = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} i.$

17.9. Второе уравнение после возведения в третью степень примет вид

$$z^{13} w^{21} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с первым уравнением системы, получим

$$z^2 w^2 = 1.$$

Остается решить систему

$$\begin{cases} z^2 w^2 = 1, \\ z^2 + w^2 = -2, \end{cases}$$

откуда находим, что $z^2 = -1$, $w^2 = -1$.

Проверяем, какие из систем

$$\begin{cases} z = i, \\ w = i, \end{cases} \quad \begin{cases} z = i, \\ w = -i, \end{cases} \quad \begin{cases} z = -i, \\ w = i, \end{cases} \quad \begin{cases} z = -i, \\ w = -i, \end{cases}$$

являются решениями. Получаем два решения,

Ответ.

$$\begin{cases} z_1 = i, \\ w_1 = i, \end{cases} \quad \begin{cases} z_2 = -i, \\ w_2 = -i. \end{cases}$$

17.10. Пусть $z = x + yi$. Тогда

$$|x - 1 + yi| = |x + (y - 1)i|,$$

т. е.

$$(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2.$$

Раскроем скобки, получим $x = y$.

Ответ. Биссектриса первого и третьего координатных углов.

17.11. Первый способ. Пусть $z = x + yi$. Тогда

$$|x + (y + 1)i| \leq 1, \quad \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \leq 1.$$

Слева записано расстояние между точкой с координатами (x, y) и точкой с координатами $(0, -1)$. Следовательно, геометрическое место точек есть круг с центром в точке $(0, -1)$ и радиусом, равным единице (круг взят вместе с ограничивающей его окружностью).

Второй способ. Перепишем неравенство в виде

$$|z - (-i)| \leq 1.$$

Мы знаем, что модуль разности двух комплексных чисел z и $-i$ равен длине отрезка, соединяющего точки z и $-i$. Следовательно, длина этого отрезка не должна быть больше единицы, т. е. геометрическое место точек — круг радиуса единица с центром в точке $-i$, взятый вместе с границей.

17.12. Пусть $z = x + yi$. Тогда

$$\operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(z - \frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = x - \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}.$$

Приравняв $\operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ нулю, получим

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 - 1) = 0, \\ x^2 + y^2 \neq 0. \end{cases}$$

Если $x = 0$, то $y \neq 0$. Это — мнимая ось с выколотой точкой в начале координат. Вторая возможность $x^2 + y^2 = 1$, т. е.

окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

Ответ. Окружность единичного радиуса с центром в начале координат и мнимая ось с выколотым началом координат.

Г л а в а 18

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

18.1. Пусть x, y, z, u — производительности первой, второй, третьей и четвертой труб соответственно. Примем объем бассейна за единицу. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z + u = \frac{1}{4}, \\ x + y + u = \frac{1}{6}, \\ y + z + u = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем, что $z = \frac{1}{12}$, а вычитая из первого уравнения третье, — что $x = \frac{1}{20}$.

Следовательно, общая производительность первой и третьей труб равна $z + x = \frac{2}{15}$.

Ответ. 7,5 часов.

18.2. Пусть плечи весов равны l_1 и l_2 соответственно. Тогда первый раз продавец отпустил $\frac{l_2}{l_1}$ кг товара, а во второй раз он отпустил $\frac{l_1}{l_2}$ кг. Таким образом, он отпустил покупателю товар в количестве

$$P = \frac{l_2}{l_1} + \frac{l_1}{l_2}.$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{l_2}{l_1} + \frac{l_1}{l_2} \geq 2 \sqrt{\frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{l_1}{l_2}} = 2,$$

где равенство достигается лишь при $l_1 = l_2$. Таким образом, продавец отпустил больше товара, чем следовало.

18.3. Предположим, что в стране живет x человек. Ее население через год составит $x_1 = x \left(1 + \frac{1}{80}\right)$, через два года $x_2 = x_1 \left(1 + \frac{1}{80}\right) = x \left(1 + \frac{1}{80}\right)^2$, а через n лет $x_n = x \left(1 + \frac{1}{80}\right)^n$. Получаем уравнение

$$x \left(1 + \frac{1}{80}\right)^n = 2x,$$

откуда

$$\left(\frac{81}{80}\right)^n = 2, \quad n = \frac{\lg 2}{\lg 81 - \lg 80}.$$

18.4. Поскольку понтоны находились в пути одинаковое время и в одинаковых условиях, то каждый из них проплыл одно и то же расстояние без буксира (см. второе указание на стр. 164). Обозначим это расстояние через x . Каждый понтон находился в пути

$$\frac{x}{u} + \frac{l-x}{v+u} \quad (1)$$

часов. Буксир, в свою очередь, помимо пути в l км вниз по течению, дважды преодолел расстояние $l-2x$: один раз вниз по течению, другой раз вверх по течению. На весь путь у него ушло

$$\frac{l}{v+u} + \frac{l-2x}{v+u} + \frac{l-2x}{v-u} \quad (2)$$

часов. Приравниваем выражения (1) и (2) (буксир был в пути столько же времени, сколько каждый понтон) и решим получившееся уравнение.

$$\text{Получим: } x = \frac{2lu}{v+3u}.$$

Следовательно, второй понтон должен транспортироваться на расстояние в

$$l-x = \frac{l(v+u)}{v+3u}$$

километров, а на всю перевозку уйдет

$$\frac{x}{u} + \frac{l-x}{v+u} = \frac{2l}{v+3u} + \frac{l}{v+3u} = \frac{3l}{v+3u}$$

часов.

Ответ. $\frac{3l}{v+3u}$.

18.5. Пусть некто родился в $18xu$ году, где x —число десятков, а y —число единиц. В 1901 году ему было $1901-18xu$ лет.

Если $y > 1$, то произведя вычитание, получим число $(9-x)(11-y)$, где $9-x$ и $11-y$ —цифры.

По условию сумма цифр числа $18xu$ равна сумме цифр числа $(9-x)(11-y)$

$$1+8+x+y=(9-x)+(11-y),$$

т. е. $x+y=5,5$, что невозможно, так как x и y —целые.

Если $y \leq 1$ (это значит, что либо $y=0$, либо $y=1$), после вычитания получим число $(10-x)(1-y)$. Когда $x \neq 0$, это число состоит из двух цифр, а когда $x=0$ —из трех, причем первые две цифры 1 и 0. Пусть $x \neq 0$. Запишем сумму цифр и для этого числа:

$$1+8+x+y=(10-x)+(1-y),$$

т. е.

$$x+y=1.$$

Так как $x \neq 0$, то $y=0$, а $x=1$. Это означает, что некто родился в 1810 году.

Пусть теперь $x=0$. Тогда получим уравнение

$$1+8+y=1+(1-y),$$

откуда $y=-3,5$, что невозможно.

Ответ. В 1810 году.

18.6. Пусть одна часть весит x карат, тогда другая весит $p-x$ карат. Цена этих частей равна lx^2 и $l(p-x)^2$ соответственно, где l —коэффициент пропорциональности. Так как цена целого брильянта была равна lp^2 , то получим уравнение

$$lp^2 = k[lx^2 + l(p-x)^2],$$

которое после упрощений примет вид

$$2kx^2 - 2kpx + p^2(k-1) = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2k}(kp \pm \sqrt{kp^2(2-k)}).$$

Проведем исследование.

По смыслу задачи $k > 1$, $p > 0$. Следовательно, подкоренное выражение будет неотрицательным, если $k \leq 2$, т. е., $1 < k \leq 2$.

Так как

$$\sqrt{kp^2(2-k)} = \sqrt{k^2p^2 - 2kp^2(k-1)} < kp$$

(мы знаем, что $k > 1$), то оба значения x неотрицательны. Легко проверить, что $p - x_1 = x_2$.

Ответ.

$$\frac{1}{2}p \left(1 - \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right); \quad \frac{1}{2}p \left(1 + \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right), \quad 1 < k \leq 2.$$

18.7. Примем расстояние, которое туристам нужно пройти на моторной лодке, за единицу. Через x кг/ч обозначим расход горючего в течение часа работы двигателя в режиме; обеспечивающем собственную скорость лодки v_1 , а через y кг/ч — расход горючего при работе двигателя во втором режиме (v_2). Весь путь лодка пройдет за $\frac{1}{v_1 - u}$ и $\frac{1}{v_2 - u}$ часов при работе двигателя в первом и во втором режимах соответственно. Так как расход горючего будет одинаковым, то

$$\frac{x}{v_1 - u} = \frac{y}{v_2 - u}.$$

Если скорость течения реки будет равна ku , то из условия получим второе уравнение

$$\frac{x}{v_1 - ku} - \frac{y}{v_2 - ku} = A.$$

Найдя из первого уравнения x , подставим во второе. Получим

$$y \left[\frac{v_1 - u}{(v_2 - u)(v_1 - ku)} - \frac{1}{v_2 - ku} \right] = A,$$

откуда

$$y = \frac{A(v_2 - u)(v_1 - ku)(v_2 - ku)}{u(k-1)(v_2 - v_1)}.$$

Так как $k > 1$, то $y > 0$ только при $v_2 > v_1$ и $ku < v_1$.
Общий расход горючего равен $\frac{y}{v_2 - u}$.

Ответ.

$$\frac{A(v_1 - ku)(v_2 - ku)}{u(k-1)(v_2 - v_1)}, \quad ku < v_1 < v_2.$$

18.8. Обозначим через x , y , z , s и t количества десятков порций стоимостью по 7, 9, 11, 13 и 15 копеек за порцию.

Условия задачи можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 7x + 9y + 11z + 13s + 15t = 184, \\ x + y + z + s + t = 18, \\ x + y = z + s + t, \\ y = 2t, \\ y > s. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, умноженное на 7, получим

$$y + 2z + 3s + 4t = 29$$

или (так как $y = 2t$)

$$2z + 3s + 6t = 29.$$

В результате сравнения второго и третьего уравнений найдем

$$z + s + t = 9.$$

Умножим его на два и вычтем из предыдущего уравнения:

$$s + 4t = 11.$$

Поскольку s и t — натуральные, t может принимать лишь два значения: $t = 1$ и $t = 2$, иначе уравнение $s + 4t = 11$ не выполняется. Если $t = 1$, то $s = 7$, а $y = 2$. Это противоречит требованию $y > s$. Следовательно, $t = 2$, $s = 3$, $y = 4$. Нетрудно найти, что $x = 5$, $z = 4$.

Ответ. 50 порций мороженого по 7 копеек, 40 порций по 9 копеек, 40 порций по 11 копеек, 30 порций по 13 копеек, 20 порций по 15 копеек.

18.9. Задачу можно было бы решить формально. Однако проще воспользоваться тем, что, взяв по одной монете каждого достоинства, мы получим 15 копеек.

Поскольку десятикопеечная монета сюда обязательно входит, то, взяв по одной из имеющихся у школьника медных монет, мы получим 5 копеек. Если у школьника есть десятикопеечные монеты, то оставшиеся 4 копейки можно получить либо как $2 + 2$, либо как $1 + 3$. И тот и другой способ не годятся, так как в наборе, составляющем 5 копеек, будут две одинаковые монеты.

Для медных монет остаются две возможности: либо у школьника только пятикопеечные монеты, либо монеты достоинством в 2 и 3 копейки.

Во втором варианте медных монет может быть либо 4, либо 8, иначе десятикопеечных монет будет меньше, чем медных. Оба случая не годятся, так как в первом десятикопеечных монет будет 9, а во втором 8.

Следовательно, у школьника есть только десятикопеечные и пятикопеечные монеты.

Ответ. 8 десятикопеечных и 4 пятикопеечные монеты.

18.10. Обозначим время, израсходованное плотами на путь по озеру, через x . Так как на весь путь ушло 11,5 суток, т. е. 276 часов, то на путь AC (буквой C обозначено устье реки) ушло $276 - x$ часов, а скорость течения реки равна $AC/(276 - x)$.

Выразим скорость течения реки с помощью остальных условий задачи. Если пароход тратит на путь от A до B 40 часов, а на путь от C до B тратит $x/2$ часов (идет в два раза быстрее, чем с плотами), то скорость парохода вниз

по течению реки равна $\frac{AC}{40 - \frac{x}{2}}$. Аналогично его скорость

вверх по течению равна $\frac{AC}{48 - \frac{x}{2}}$. Если вычесть из первой

скорости вторую, то получим удвоенную скорость течения реки. Мы пришли к уравнению

$$\frac{AC}{40 - \frac{x}{2}} - \frac{AC}{48 - \frac{x}{2}} = \frac{2AC}{276 - x},$$

решая которое найдем: $x_1 = 24$, $x_2 = 136$. Второй корень посторонний, так как $40 - \frac{x}{2}$ и $48 - \frac{x}{2}$ становятся отрицательными, что не имеет физического смысла.

Ответ. 24 часа.

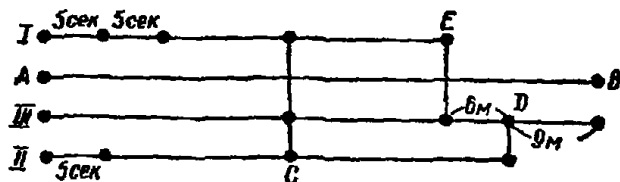


Рис. Р.18.11.

18.11. Пусть v_1 , v_2 и v_3 — скорости пловцов, а x — расстояние AC (рис. Р.18.11). Приравниваем времена, затраченные пловцами на путь AC :

$$\frac{x}{v_3} + 10 = \frac{x}{v_2} + 5 = \frac{x}{v_1}. \quad (1)$$

Из условия встречи в точке D третьего и второго пловцов получим

$$\frac{64}{v_3} + 5 = \frac{46}{v_2}, \quad (2)$$

а в точке E третьего и первого:

$$\frac{70}{v_3} + 10 = \frac{40}{v_1}. \quad (3)$$

Так как в уравнение (2) входят v_2 и v_3 , а в уравнение (3) v_1 и v_3 , то уравнения (1) перепишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_3} &= \frac{5}{x}, \\ \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3} &= \frac{10}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Преобразуем теперь уравнения (2) и (3):

$$\begin{aligned} 46 \left(\frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_3} \right) &= \frac{18}{v_3} + 5, \\ 4 \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3} \right) &= \frac{3}{v_3} + 1, \end{aligned}$$

и воспользуемся заменой (4). Получим систему

$$\begin{cases} 46 \frac{5}{x} = \frac{18}{v_3} + 5, \\ 4 \frac{10}{x} = \frac{3}{v_3} + 1, \end{cases}$$

из которой проще исключить v_3 . Найдем $x = 10$. Следовательно, $v_3 = 1$.

Ответ. 1 м/сек.

18.12. Обозначим через x часть сосуда, занимаемую раствором кислоты, а объем всего сосуда примем за единицу. После того как сосуд долили 90%-ным раствором, количество концентрированной кислоты стало

$$\frac{px}{100} + \frac{q(1-x)}{100},$$

а новая концентрация

$$p_1 = px + q(1-x) = (p-q)x + q.$$

Если вместо p подставить p_1 , то получим p_2 , аналогично можно получить p_3 и т. д. Приходим к рекуррентному соотношению

$$p_k = x(p_{k-1} - q) + q.$$

Вычислим p_2 :

$$p_2 = x(p_1 - q) + q = x^2(p - q) + q.$$

По индукции легко доказать, что

$$p_k = x^k(p - q) + q.$$

Так как $p_k = r$, то получим уравнение

$$r = x^k(p - q) + q,$$

откуда

$$x = \sqrt[k]{\frac{r - q}{p - q}}.$$

Ответ. $\sqrt[k]{\frac{r - q}{p - q}}$, где либо $r > q$, $p > q$, либо $r < q$, $p < q$.

18.13. Пусть x и y — скорости автомобиля и мотоцикла соответственно, а z — длина пути AB . Тогда первая встреча

произойдет через $\frac{z}{x+y}$ часов после начала движения на расстоянии $\frac{zy}{x+y}$ от пункта B . Те же рассуждения, примененные к отрезку длиной в $\frac{zy}{x+y}$, позволят найти расстояние между первым и вторым пунктами встречи. По условию это расстояние равно $\frac{2}{9}z$, т. е.

$$\frac{zyx}{(x+y)^2} = \frac{2}{9}z, \text{ или } \frac{yx}{(x+y)^2} = \frac{2}{9}.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0,$$

т. е.

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} + 2 = 0,$$

откуда

$$\text{либо } \frac{x}{y} = 2, \text{ либо } \frac{x}{y} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Очевидно, что эти отношения дают симметричные решения. Если предположить, что скорость автомобиля больше скорости мотоцикла, то $x = 2y$.

Используем оставшиеся условия задачи. Если бы скорость автомобиля была на 20 км/ч меньше, т. е. равнялась бы $(x-20)$ км/ч, то первая встреча произошла бы через 3 часа после начала движения. Получаем уравнение

$$\frac{z}{x+y-20} = 3. \quad (2)$$

Мотоцикл до встречи преодолел бы в этом случае расстояние в 3у км, а расстояние между пунктами первой и второй встреч составило бы $\frac{3yx}{x+y-20}$. Получаем третье уравнение:

$$\frac{3yx}{x+y-20} = 60. \quad (3)$$

Подставим в это уравнение $x = 2y$. Получим квадратное уравнение, корнями которого являются $y_1 = 20$, $y_2 = 10$. Второе значение не подходит, так как тогда $x_2 = 20$ и

$x - 20 = 0$, что не имеет для нашей задачи физического смысла.

Итак, $y = 20$ км/ч, $x = 40$ км/ч, а из уравнения (2) найдем, что $z = 120$ км.

Ответ. 120 км.

18.14. Пусть пассажир опоздал на поезд на t часов, проехал на такси x км, а на автобусе y км. Скорость поезда обозначим через u . Тогда на путь до встречи с поездом пассажир израсходует $\frac{x}{v_1} + \frac{y}{v_2}$ часов, а поезд пройдет этот путь за $\frac{x+y}{u}$ часов. Учтя опоздание пассажира, получим

$$\frac{x}{v_1} + \frac{y}{v_2} = \frac{x+y}{u} - t. \quad (1)$$

Поездка на такси и автобусе обошлась пассажиру в $ax + A$ рублей. Если бы он ехал все время на такси, то это стоило бы $ax + A - B$ рублей и он догнал бы поезд проехав $\frac{ax + A - B}{a}$ км. Приравнивая времена, затраченные на этот путь поездом и догонявшим его пассажиром, получим второе уравнение:

$$\frac{ax + A - B}{av_1} = \frac{ax + A - B}{au} - t. \quad (2)$$

Третье уравнение очевидно:

$$\frac{x}{v_1} + \frac{y}{v_2} - \tau = \frac{ax + A - B}{av_1}. \quad (3)$$

Записав его в виде

$$\frac{x}{v_1} + \frac{y}{v_2} - \tau = \frac{x}{v_1} + \frac{A - B}{av_1},$$

найдем

$$y = \tau v_2 + \frac{(A - B) v_2}{av_1}.$$

Приравниваем выражения для t из уравнений (1) и (2). Получим

$$\frac{x}{u} + \frac{A - B}{au} - \frac{x}{v_1} - \frac{A - B}{av_1} = \frac{x}{u} + \frac{y}{u} - \frac{x}{v_1} - \frac{y}{v_2},$$

т. е.

$$\frac{A-B}{au} - \frac{A-B}{av_1} = \frac{y}{u} - \frac{y}{v_2}.$$

Поскольку y уже найден, можно вычислить u :

$$u = v_2 - \frac{(A-B)(v_1 - v_2)}{av_1}.$$

Чтобы задача имела решение, скорость поезда должна быть положительной. Так как $v_1 > v_2$ и $A > B$, то из неравенства

$$v_2 - \frac{(A-B)(v_1 - v_2)}{av_1} > 0$$

следует, что $\frac{v_2 v_1}{v_1 - v_2} > \frac{A-B}{av_1}$.

Ответ. $v_2 - \frac{(A-B)(v_1 - v_2)}{av_1}$, если $\frac{v_2 v_1}{v_1 - v_2} > \frac{A-B}{av_1}$.

18.15. Обозначим скорость товарного поезда до остановки через x , расстояние AB через y , а расстояние AC через z . Тогда пассажирский поезд шел вначале со скоростью mx , а после остановки оба поезда шли соответственно со скоростями $5x/4$ и $5mx/4$. На весь путь без остановки товарный поезд потратил бы y/x часов. Поскольку он сделал остановку на t часов в z км от A , а затем прошел оставшиеся $y-z$ км со скоростью $5x/4$, то он израсходовал на весь путь

$$\frac{z}{x} + \frac{4(y-z)}{5x} + t \text{ часов.}$$

Следовательно,

$$\frac{y}{x} + t_1 = \frac{z}{x} + \frac{4(y-z)}{5x} + t.$$

Аналогичное уравнение составляем для пассажирского поезда, который шел в обратном направлении:

$$\frac{y}{mx} + t_2 = \frac{y-z}{mx} + \frac{4y}{5mx} + t.$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно из времени, которое понадобилось товарному поезду, чтобы преодолеть отрезок AC , вычесть время, которое понадобилось пассажирскому поезду, чтобы пройти расстояние BC . В наших

обозначениях эта разность запишется так:

$$\frac{z}{x} - \frac{y-z}{mx}.$$

Именно это выражение нам нужно определить с помощью полученных выше уравнений. Мы можем добиться этого, решив уравнения относительно $\frac{z}{x}$ и $\frac{y}{x}$. После простых преобразований система примет вид

$$\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{z}{x} = 5(t - t_1), \\ 4\frac{y}{x} - 5\frac{z}{x} = 5m(t_2 - t). \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на -4 и сложив со вторым, найдем $\frac{z}{x}$, а умножив его на -5 и сложив со вторым, найдем $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} = 25(t - t_1) - 5m(t_2 - t), \quad \frac{z}{x} = 20(t - t_1) - 5m(t_2 - t).$$

Остается подставить найденные значения в выражение

$$(m+1)\frac{z}{mx} - \frac{y}{mx}.$$

$$\text{Ответ. } \frac{5}{m} [(4m-1)(t-t_1) - m^2(t_2-t)].$$

18.16. Обозначим скорость самолета через x , а скорость вертолета через y . До первой встречи вертолет летел $\frac{d}{y}$ часов, а самолет $\frac{d}{x}$ часов. Так как самолет вылетел на t часов позднее, то

$$\frac{d}{y} = \frac{d}{x} + t.$$

Второе уравнение мы получим из условия второй встречи. Вертолет к этому моменту находился в d км от B и пробыл в полете $\frac{s-d}{y}$ часов. Самолет преодолел расстояние $s+d$ и пробыл в полете $\frac{s+d}{x}$ часов. Следовательно,

$$\frac{s-d}{y} = \frac{s+d}{x} + t.$$

Хотя полученную систему уравнений можно решить, а затем ответить на вопрос задачи, мы сначала вычислим интересующую нас величину в предположении, что x и y известны. Вертолет прилетел в B через $\frac{s}{y}$ часов после вылета. Самолет вернулся в A через $t + \frac{2s}{x}$ часов после того, как вертолет вылетел из A . Нас интересует величина

$$t + \frac{2s}{x} - \frac{s}{y}$$

— на столько часов самолет вернулся в A позднее, чем вертолет прилетел в B . Таким образом, из полученных уравнений нужно определить $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$. Умножив первое уравнение на $d - s$, а второе на d и сложив, найдем

$$\frac{(s+d)d}{x} + \frac{d(d-s)}{x} + t(d-s) + td = 0,$$

т. е.

$$\frac{2d^2}{x} = t(s - 2d),$$

откуда

$$\frac{1}{x} = \frac{t(s - 2d)}{2d^2}.$$

Из первого уравнения определяем $\frac{1}{y}$:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{t}{d} = \frac{ts}{2d^2}.$$

Следовательно,

$$t + \frac{2s}{x} - \frac{s}{y} = t + \frac{2st(s - 2d)}{2d^2} - \frac{ts^2}{2d^2} = t + \frac{st(s - 4d)}{2d^2}.$$

Задача имеет решение, если все участвующие компоненты положительны. Чтобы величина $\frac{1}{x}$ имела смысл, необходимо $s > 2d$.

По условию вертолет прилетел в B раньше, чем самолет вернулся в A . Поэтому

$$t + \frac{st(s - 4d)}{2d^2} > 0,$$

т. е.

$$s^2 - 4sd + 2d^2 > 0.$$

Получаем квадратное неравенство относительно отношения $\frac{s}{d}$:

$$\left(\frac{s}{d}\right)^2 - 4\frac{s}{d} + 2 > 0,$$

откуда

$$\frac{s}{d} < 2 - \sqrt{2} \quad \text{или} \quad \frac{s}{d} > 2 + \sqrt{2}.$$

Первое решение придется отбросить, так как тогда $s < 2d - \sqrt{2}d$, а это противоречит условию, что $s > 2d$.

$$\text{Ответ. } t + \frac{st(s-4d)}{2d^2}, \quad s > (2 + \sqrt{2})d.$$

18.17. Устье реки, на которой стоит порт M , обозначим через A , а устье второй реки — через B . Расстояние MA обозначим буквой x , а расстояние BN — буквой y . Искомое расстояние тогда будет равно $s = (x + y)$. На путь от M до N пароход потратил: $\frac{x}{v+v_1}$ часов на путь по первой реке (по течению), $\frac{s-(x+y)}{v}$ часов на путь по озеру и $\frac{y}{v-v_2}$ часов на путь по второй реке (против течения). Так как на весь путь ушло t часов, то получаем уравнение

$$\frac{x}{v+v_1} + \frac{s-(x+y)}{v} + \frac{y}{v-v_2} = t.$$

Аналогично для пути от N до M получим уравнение

$$\frac{y}{v+v_2} + \frac{s-(x+y)}{v} + \frac{x}{v-v_1} = t.$$

Приравнявая левые части этих уравнений, получим

$$x \left(\frac{1}{v-v_1} - \frac{1}{v+v_1} \right) = y \left(\frac{1}{v-v_2} - \frac{1}{v+v_2} \right),$$

т. е.

$$x = y \frac{v^2 - v_1^2}{v^2 - v_2^2} \cdot \frac{v_2}{v_1}.$$

Подставим найденное выражение для x в первое уравнение и найдем

$$y = \frac{(tv-s)(v^2-v_2^2)}{v_2(v_1+v_2)},$$

следовательно,

$$x = \frac{(tv-s)(v^2-v_1^2)}{v_1(v_1+v_2)}.$$

Остается найти $s = (x+y)$.

$$\text{Ответ. } (s-tv) \frac{v^2}{v_1 v_2} + tv.$$

Г л а в а 19

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

19.1. Сравним n -й и $(n+1)$ -й члены последовательности:

$$\frac{n! 2^n}{n^n} \vee \frac{(n+1)! 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}},$$

или после упрощений:

$$\frac{1}{n^n} \vee \frac{(n+1) \cdot 2}{(n+1)^{n+1}}, \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \vee 2.$$

Так как

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \dots,$$

где многоточиями обозначены некоторые положительные члены, то

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 2 \quad \text{при } n > 1.$$

Следовательно, последовательность убывающая, начиная со второго члена.

19.2. Так как a_p , a_q , a_r и a_s — члены арифметической прогрессии, то

$$\begin{aligned} a_q - a_p &= d(q-p), \\ a_r - a_q &= d(r-q), \\ a_s - a_r &= d(s-r). \end{aligned}$$

Кроме того, $a_p a_r = a_q^2$, $a_q a_s = a_r^2$, $a_p a_s = a_q a_r$, что отражает условие, в силу которого a_p , a_q , a_r и a_s образуют

геометрическую прогрессию. Из первой группы формул имеем

$$q - p = \frac{a_q - a_p}{d}, \quad r - q = \frac{a_r - a_q}{d}, \quad s - r = \frac{a_s - a_r}{d}.$$

Составим произведение $(p - q)(r - s)$ и воспользуемся второй группой формул:

$$\begin{aligned} (p - q)(r - s) &= \frac{(a_q - a_p)(a_s - a_r)}{d^2} = \frac{a_q a_s - a_q a_r - a_p a_s + a_p a_r}{d^2} = \\ &= \frac{a_r^2 - 2a_r a_q + a_q^2}{d^2} = \left(\frac{a_r - a_q}{d} \right)^2 = (q - r)^2, \end{aligned}$$

что и доказывает сформулированное в условии утверждение.

19.3. По условию

$$\begin{aligned} a &= a_1 + d(m - 1) = u_1 q^{m-1}, \\ b &= a_1 + d(n - 1) = u_1 q^{n-1}, \\ c &= a_1 + d(p - 1) = u_1 q^{p-1}. \end{aligned}$$

Составим разности:

$$b - c = d(n - p), \quad c - a = d(p - m), \quad a - b = d(m - n).$$

Подставим в левую часть равенства, которое нужно доказать:

$$\begin{aligned} a^{b-c} b^{c-a} c^{a-b} &= (u_1 q^{m-1})^{d(n-p)} (u_1 q^{n-1})^{d(p-m)} (u_1 q^{p-1})^{d(m-n)} = \\ &= u_1^{d(n-p)+d(p-m)+d(m-n)} q^{d(m-1)(n-p)+d(n-1)(p-m)+d(p-1)(m-n)}. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим в обоих показателях нули, что и доказывает равенство произведения единице.

19.4. Перейдем в левой части равенства к общему основанию x и сделаем некоторые упрощения:

$$\frac{\frac{1}{\log_x a} - \frac{1}{\log_x b}}{\frac{1}{\log_x b} - \frac{1}{\log_x a}} = \frac{(\log_x b - \log_x a) \log_x c}{(\log_x c - \log_x b) \log_x a} = \frac{\log_x \frac{b}{a}}{\log_x \frac{c}{b}} \cdot \frac{\log_a x}{\log_c x} = \frac{\log_a x}{\log_c x}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$ — знаменателю прогрессии.

19.5. Имеем

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{7}{9} (9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots 9}_{n \text{ цифр}}) = \\
 &= \frac{7}{9} (10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) = \\
 &= \frac{7}{9} (\underbrace{11\dots 10}_{n \text{ цифр}} - n).
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } \frac{7}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right) = \frac{7}{9} (\underbrace{11\dots 10}_{n \text{ цифр}} - n).$$

19.6. Преобразуем выражение, стоящее под корнем:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{11\dots 1}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{22\dots 2}_{n \text{ цифр}} &= \frac{1}{9} (\underbrace{99\dots 9}_{2n \text{ цифр}} - 2 \cdot \underbrace{99\dots 9}_{n \text{ цифр}}) = \\
 &= \frac{1}{9} [10^{2n} - 1 - 2(10^n - 1)] = \frac{1}{9} (10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1) = \\
 &= \frac{1}{9} (10^n - 1)^2.
 \end{aligned}$$

После извлечения квадратного корня получим

$$\frac{1}{3} (10^n - 1) = \frac{1}{3} (\underbrace{99\dots 9}_{n \text{ цифр}}) = \underbrace{33\dots 3}_{n \text{ цифр}}.$$

19.7. Из условия следует, что

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 2a_2, \\ a_1 a_3 = a_2^2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{a_1 + a_3}{2} \right)^2 = a_1 a_3,$$

а следовательно, $(a_1 - a_3)^2 = 0$, $a_1 = a_3$. Поскольку $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, то $a_2 = a_1$. Таким образом, $a_1 = a_2 = a_3$. Решим теперь систему уравнений

$$\begin{cases} 8x + \log_2 y = 2^{x - \log_2 y}, \\ 2^{x - \log_2 y} = 5y. \end{cases}$$

Первое уравнение можно последовательно преобразовать:

$$2^{8x + \log_2 y} = 2^{2^{x - \log_2 y}}, \quad x = -2 \log_2 y.$$

Подставив найденное значение x во второе уравнение системы, получим

$$2^{-x \log_2 y} = 5y, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{y^5} = 5y, \quad y = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}.$$

Теперь можно найти x :

$$x = -2 \log_2 y = \frac{1}{2} \log_2 5.$$

Ответ. $\frac{1}{2} \log_2 5, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{5}}.$

19.8. Пусть q — знаменатель прогрессии. Тогда по теореме Виета

$$\begin{aligned} x_1(1+q) &= 3, \\ x_1 q^2(1+q) &= 12, \\ x_1^2 q &= A, \\ x_1^2 q^5 &= B. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений (подстановкой первого во второе) находим, что $q^2 = 4$.

Так как последовательность по условию является возрастающей, то $q = 2$, откуда $x_1 = 1$, что не противоречит тому, что прогрессия возрастающая.

Из двух вторых уравнений определяем A и B .

Ответ. $A = 2, B = 32$.

19.9. Пусть $x_2 = x_1 q$, $x_3 = x_1 q^2$. Тогда по теореме Виета, примененной к данному уравнению, имеем

$$\begin{aligned} x_1 + x_1 q + x_1 q^2 &= -1, \\ x_1^2 q + x_1^2 q^2 + x_1^2 q^3 &= 2. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получим $x_1(1+q+q^2) = -1$. Это позволяет следующим образом преобразовать левую часть второго уравнения:

$$x_1^2 q(1+q+q^2) = -x_1 q,$$

откуда $x_1 = -\frac{2}{q}$. Подставим выражение для x_1 в первое уравнение, получим

$$\frac{2(1+q+q^2)}{q} = 1, \quad \text{т. е.} \quad 2q^2 + q + 2 = 0,$$

откуда

$$q_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}.$$

Теперь можно найти x_1 :

$$x_1 = -\frac{2}{q} = \frac{-8}{-1 \pm i\sqrt{15}} = \frac{8}{1 \mp i\sqrt{15}} = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

(обратите внимание, что для q и x_1 нужно брать либо в обоих случаях верхние, либо в обоих случаях нижние знаки).

Остается найти $x_2 = qx_1$, $x_3 = q^2x_1$.

При $q = q_1$ и $q = q_2$ получаем одно и то же множество корней (x_1 и x_3 меняются местами).

Ответ. $\frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$, -2 , $\frac{1 \mp i\sqrt{15}}{2}$.

19.10. Из условия следует, что

$$\frac{a_1}{1-q} = 2 \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}, \quad \text{откуда } q^n = \frac{1}{2}.$$

Произведение n первых членов прогрессии равно

$$\begin{aligned} a_1^n q^{1+2+\dots+(n-1)} &= 2^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \\ &= \sqrt{2^n (q^n)^{-1} (q^n)^n} = \sqrt{2^n \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ответ. $\sqrt{2}$.

19.11. Пусть a — цифра сотен, d — разность прогрессии. Искомое число делится на пять, если его последняя цифра либо 0, либо 5, т. е. либо $a + 2d = 0$, либо $a + 2d = 5$. Чтобы число делилось на девять, сумма его цифр должна делиться на девять. Но поскольку сумма трех цифр может изменяться от нуля до двадцати семи, имеются три возможности:

$$a + (a + d) + (a + 2d) = 9; 18; 27.$$

Последнюю возможность отбрасываем, так как число 999 не делится на пять.

Пусть $a + 2d = 0$. Если $a + d = 3$, то $d = -3$, $a = 6$. Получим число 630. Если $a + d = 6$, то $d = -6$, $a = 12$, что невозможно.

Пусть теперь $a + 2d = 5$. Когда $a + d = 3$, получим $d = 2$, $a = 1$, что даст число 135. Когда $a + d = 6$, получим $d = -1$, $a = 7$, что приводит к числу 765. Поскольку все возможности исчерпаны, задача решена.

Ответ. 630; 135; 765.

19.12. Задачу можно решить, обозначив через x цифру единиц, а через q — знаменатель прогрессии. Используя условия задачи, мы придем к двум уравнениям:

$$100xq^2 + 10xq + x - 594 = 100x + 10xq + xq^2, \\ (x + 1) + (xq^2 + 1) = 2(xq + 2).$$

Первое уравнение можно переписать в виде

$$x(q^2 - 1) = 6,$$

а второе — в виде

$$x(q^2 - 2q + 1) = 2, \quad \text{т. е. } x(q - 1)^2 = 2.$$

Деля первое уравнение на второе, получим

$$\frac{q+1}{q-1} = 3, \quad q = 2.$$

Следовательно, $x = 2$.

Задачу можно решить перебором, если воспользоваться тем, что цифры числа образуют геометрическую прогрессию, причем цифра сотен больше пяти (так как число больше 594). Можно доказать, что имеются лишь три возможности: 842, 931 и 964. Второе и третье из этих чисел нужно отбросить, так как $931 - 594 \neq 139$ и $964 - 594 \neq 469$. Остается убедиться, что для числа 842 все условия задачи выполнены.

Требование, чтобы числа $x + 1$, $xq + 2$, $xq^2 + 1$ образовывали арифметическую прогрессию при таком решении оказывается лишним.

Ответ. 842.

19.13. Пусть в совхозе было n комбайнов, один смог бы убрать весь урожай за x часов непрерывной работы и при работе по плану все комбайны одновременно находились в поле y часов. Так как все комбайны могут справиться с уборкой за 24 часа, а производительность одного комбайна $1/x$, то

$$\frac{24}{x}n = 1, \quad \text{т. е. } 24n = x.$$

Если комбайны работают по плану, то, работая вместе, они сделали $n \frac{1}{x} y$ часть всей работы. Кроме этого, первый комбайн работал $n-1$ часов, второй $n-2$, а $(n-1)$ -й работал один час. Учитывая все это, получим уравнение

$$\frac{n-1}{x} + \frac{n-2}{x} + \dots + \frac{1}{x} + n \frac{1}{x} y = 1,$$

или

$$\frac{n-1}{2} n + ny = x.$$

Так как $x = 24n$, то из этого уравнения можно выразить y через n :

$$y = 24 - \frac{n-1}{2}.$$

Наконец, последнее условие задачи можно записать в виде уравнения

$$(n + y - 7)(n - 5) \frac{1}{x} = 1.$$

Подставляя вместо x и y их выражения через n , придем к квадратному уравнению

$$\left(n + 17 - \frac{n-1}{2}\right)(n-5) = 24n,$$

т. е. $n^2 - 18n - 175 = 0$.

Решая это уравнение, найдем, что $n_1 = 25$, $n_2 = -7$. Второй корень не имеет смысла.

Ответ. 25.

19.14. Пусть братьям a , aq и aq^2 лет. Тогда они получат соответственно x , xq и xq^2 рублей.

Через 3 года им будет $a+3$, $aq+3$ и aq^2+3 лет, причем старшему окажется вдвое больше лет, чем младшему:

$$aq^2 + 3 = 2(a + 3). \quad (1)$$

При дележе через 3 года младший брат получит $x+105$, средний $xq+15$. Чтобы узнать, сколько получит старший брат, вычтем эти деньги из всей суммы:

$$x + xq + xq^2 - (x + 105) - (xq + 15) = xq^2 - 120.$$

Так как братья делят деньги пропорционально их возрасту, то получим еще два уравнения:

$$\frac{x+105}{a+3} = \frac{xq+15}{aq+3}, \quad \frac{x+105}{a+3} = \frac{xq^2-120}{aq^2+3}. \quad (2)$$

Уравнение (1) позволяет записать второе из уравнений (2) так:

$$2(x+105) = xq^2 - 120,$$

т. е.

$$x(q^2 - 2) = 330. \quad (3)$$

Если в (1) раскрыть скобки, а затем вынести за скобки a , то

$$a(q^2 - 2) = 3. \quad (1')$$

Сравним с уравнением (3):

$$x = 110a.$$

Первое из уравнений (2) можно переписать так:

$$(110a + 105)(aq + 3) = (110aq + 15)(a + 3).$$

Раскроем скобки и решим систему, состоящую из уравнения, полученного в результате, и из уравнения (1'):

$$\begin{cases} 5aq - 7a = 6, \\ a(q^2 - 2) = 3. \end{cases}$$

Из первого уравнения $a = \frac{6}{5q-7}$. Подставим во второе. После преобразований получим квадратное уравнение

$$6q^2 - 15q + 9 = 0,$$

откуда $q_1 = \frac{3}{2}$, $q_2 = 1$.

Второй корень посторонний, так как тогда всем братьям одинаковое количество лет и никто из них не может через 3 года стать вдвое старше другого.

Ответ. 12, 18, 27.

19.15. Пусть $\div a, b, c$ и $\div a^2, b^2, c^2$. Другими словами, $2b = a + c$ и $b^4 = a^2 c^2$. Если первое уравнение возвести в

квадрат

$$4b^2 = a^2 + 2ac + c^2,$$

а второе записать в виде $b^2 = |ac|$, то, сравнивая левые части этих равенств, найдем, что

$$a^2 + 2ac + c^2 = 4|ac|.$$

Если a и c одного знака, получаем уравнение

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0, \quad \text{т. е. } (a - c)^2 = 0,$$

откуда $a = c$. Следовательно, $a^2 = c^2$ и знаменатель прогрессии $\div a^2, b^2, c^2$ равен 1. Если a и c разных знаков, получаем уравнение

$$a^2 + 6ac + c^2 = 0.$$

Разделим на a^2 (по условию $a \neq 0$) и решим уравнение

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 6\frac{c}{a} + 1 = 0$$

относительно c/a :

$$\frac{c}{a} = -3 \pm \sqrt{8}.$$

Так как $\frac{c^2}{a^2} = q^2$, то

$$q^2 = (-3 \pm \sqrt{8})^2.$$

Числа a^2, b^2 и c^2 , образующие геометрическую прогрессию, положительны. Следовательно, $q > 0$. Таким образом, из последнего уравнения

$$q_{2,3} = 3 \pm \sqrt{8}.$$

Ответ. 1, $3 + \sqrt{8}$, $3 - \sqrt{8}$.

19.16. При $n = 1$ формулы верны:

$$\begin{aligned} a_1 &= a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{a+b}{2}, \\ b_1 &= a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{8}\right) = a + \frac{3}{4}(b-a) = \frac{a+3b}{4} = \\ &= \frac{b + \frac{a+b}{2}}{2}. \end{aligned}$$

Предположим, что эти формулы верны для $n=k$, и докажем, что они верны для $n=k+1$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{1}{2} \left[2a + \frac{2}{3} (b-a) \left(2 - \frac{1}{2 \cdot 4^k} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[2a + \frac{2}{3} (b-a) \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{4^{k+1}} \right) \right] = \\ &= a + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 - \frac{1}{4^{k+1}} \right), \\ b_{k+1} &= \frac{b_k + a_{k+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[2a + \frac{2}{3} (b-a) \left(2 + \frac{1}{2 \cdot 4^k} - \frac{1}{4^{k+1}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[2a + \frac{2}{3} (b-a) \left(2 + \frac{4-2}{2 \cdot 4^{k+1}} \right) \right] = \\ &= a + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} = 0$, то предел последовательности равен

$$a + \frac{2}{3} (b-a) = \frac{a+2b}{3}.$$

Ответ. $\frac{a+2b}{3}.$

Г л а в а 20

СУММИРОВАНИЕ

20.1. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Так как

$$\frac{1}{(1+k)^2} < \frac{1}{k(1+k)},$$

то

$$\begin{aligned} S &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1. \end{aligned}$$

При доказательстве мы воспользовались тем, что $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Такой прием часто применяется и называется *разложением дроби на простейшие*.

20.2. Так как

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{d}{a_k a_{k+1}},$$

то

$$\begin{aligned} Sd &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{dn}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{n-1}{d^2 n}$.

20.3. Представим k -е слагаемое в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

20.4. Левую часть данного равенства перепишем в виде

$$\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1},$$

воспользовавшись для этого формулой суммы членов геометрической прогрессии. Тогда (поскольку $a \neq 1$)

$$a^{n+1} - 1 = (a - 1)(1 + a)(1 + a^2) \dots (1 + a^{2^k}).$$

Правая часть может быть записана так:

$$(a^2 - 1)(1 + a^2) \dots (1 + a^{2^k}) = (a^4 - 1) \dots (1 + a^{2^k}) = a^{2^{k+1}} - 1.$$

Итак,

$$a^{n+1} = a^{2^{k+1}}.$$

По условию $a \neq 0, 1, -1$. Это позволяет найти нужную нам зависимость.

Ответ. $n+1 = 2^{k+1}$.

20.5. Выписав коэффициенты данного многочлена слева направо и написав под ними коэффициенты того же многочлена, расположенные в обратном порядке, получим

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 1, & 2, & 3, & \dots, & n-1, & n, \\ n, & n-1, & n-2, & n-3, & \dots, & 1, & 1. \end{array}$$

Теперь можно выписать коэффициент при x^n :

$$1 \cdot n + 1(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \dots + (n-1)1 + n \cdot 1.$$

Эту сумму можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} 2n + 1(n-1) + 2(n-2) + \dots + (n-1)[n-(n-1)] = \\ = 2n + n[1+2+\dots+(n-1)] - [1^2+2^2+\dots+(n-1)^2]. \end{aligned}$$

Каждую из сумм, стоящих в скобках, легко подсчитать.

$$1+2+\dots+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2},$$

$$1^2+2^2+\dots+(n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Таким образом, искомый коэффициент равен

$$\begin{aligned} 2n + \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \\ = 2n + \frac{n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{n(n^2+11)}{6}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{n(n^2+11)}{6}$.

20.6. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left| \frac{x}{1+2x} \right| < 1, \\ |2x| < 1. \end{cases}$$

Из второго неравенства следует, что $-1 < 2x < 1$, т. е. $1+2x > 0$. Поэтому первое неравенство можно переписать

в виде

$$\frac{|x|}{1+2x} < 1, \text{ или } |x| < 1 + 2x.$$

Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} |x| < 1 + 2x, \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x < 1 + 2x, \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ -x < 1 + 2x, \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$

20.7. Так как $k \cdot k! = (k+1)k! - k(k-1)!$, то

$$S_n = 2 \cdot 1! - 1 \cdot 0! + 3 \cdot 2! - 2 \cdot 1! + 4 \cdot 3! - 3 \cdot 2! + \dots \\ \dots + (n+1)n! - n(n-1)!$$

После приведения подобных получим

$$S_n = (n+1)n! - 0! = (n+1)! - 1.$$

Ответ. $(n+1)! - 1.$

20.8. Домножим S_n на x^2 :

$$x^2 S_n = x^3 + 4x^5 + 7x^7 + \dots + (3n-2)x^{2n+1},$$

и вычтем полученное выражение из S_n :

$$S_n(1-x^2) = x + 3x^3 + 3x^5 + \dots + 3x^{2n-1} - (3n-2)x^{2n+1} = \\ = x - (3n-2)x^{2n+1} + \frac{3x^3(x^{2(n-1)}-1)}{x^2-1}.$$

Ответ. $S_n = \frac{x - (3n-2)x^{2n+1}}{1-x^2} + \frac{3x^3(1-x^{2(n-1)})}{(1-x^2)^2}.$

20.9. Рассмотрим тождество¹⁾

$$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

¹⁾ Формулы для S_n^2, S_n^3 и т. п. доказываются аналогично с помощью тождеств: $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

Положим в нем последовательно $x = 1, 2, \dots, n$ и сложим n полученных равенств:

$$2^5 + 3^5 + \dots + (n+1)^5 = 1 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 + \\ + 5(1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + 10(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + \\ + 10(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 5(1 + 2 + \dots + n) + n.$$

После приведения подобных получим

$$(n+1)^5 = 1 + 5S_n^4 + 10S_n^3 + 10S_n^2 + 5S_n + n,$$

откуда

$$5S_n^4 = (n+1)^5 - 10S_n^3 - 10S_n^2 - 5S_n - n - 1.$$

Так как

$$S_n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_n = \frac{(1+n)n}{2},$$

то

$$5S_n^4 = \frac{(n+1)n}{6} (6n^3 + 9n^2 + n - 1).$$

Многочлен третьей степени имеет корень $n = -\frac{1}{2}$ и поэтому делится на $2n+1$.

$$\text{Ответ. } \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1).$$

20.10. В n -й группе содержится n членов.

Пусть n четное. Подсчитаем число четных чисел, встречающихся во всех группах до n -й. Это число равно

$$2 + 4 + 6 + \dots + (n-2) = \frac{n(n-2)}{4}.$$

Следовательно, последнее четное число, встречающееся до n -й группы, равно $2 \frac{n(n-2)}{4} = \frac{n(n-2)}{2}$, а первое четное число, входящее в n -ю группу, равно

$$\frac{n(n-2)}{2} + 2.$$

Теперь можно найти сумму n последовательных четных чисел, начинающихся с $\frac{n(n-2)}{2} + 2$. Эта сумма равна

$$\frac{2 \left[\frac{n(n-2)}{2} + 2 \right] + 2(n-1)}{2} n = \frac{n}{2} (n^2 + 2).$$

Пусть теперь n нечетное. Число нечетных членов, встречающихся до n -й группы, равно

$$1 + 3 + 5 + \dots + (n-2) = \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Последним нечетным числом, стоящим до n -й группы, будет $\frac{(n-1)^2}{2} - 1$, а первым числом, входящим в n -ю группу, — число $\frac{(n-1)^2}{2} + 1$.

Следовательно, сумма n последовательных нечетных чисел, начиная с $\frac{(n-1)^2}{2} + 1$, равна

$$\frac{2 \left[\frac{(n-1)^2}{2} + 1 \right] + 2(n-1)}{2} n = \frac{n}{2} (n^2 + 1).$$

Ответы можно объединить.

$$\text{Ответ. } \frac{n}{2} \left[n^2 + \frac{3}{2} + (-1)^n \frac{1}{2} \right].$$

20.11. Домножим S_n на $2 \sin \frac{\pi}{2n}$:

$$\begin{aligned} 2S_n \sin \frac{\pi}{2n} &= 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{2\pi}{n} + \dots \\ &\dots + 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{(n-1)\pi}{n} = \\ &= \sin \frac{3\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{5\pi}{2n} - \sin \frac{3\pi}{2n} + \dots \\ &\dots + \sin \frac{(2n-3)\pi}{2n} - \sin \frac{(2n-5)\pi}{2n} + \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} - \sin \frac{(2n-3)\pi}{2n}. \end{aligned}$$

После приведения подобных получим

$$\begin{aligned} 2S_n \sin \frac{\pi}{2n} &= -\sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} = \\ &= -\sin \frac{\pi}{2n} + \sin \left(\pi - \frac{\pi}{2n} \right) = 0. \end{aligned}$$

Так как $\sin \frac{\pi}{2n} \neq 0$ при натуральных n , то $S_n = 0$.

Ответ. 0.

Г л а в а 21

СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ

21.1. Присвоим каждому из сидящих за круглым столом номер: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Образовывая циклические перестановки: $a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$; $a_{n-1}, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ и т. д., мы будем получать тот же способ размещения за столом. Таких циклических перестановок можно составить n .

Кроме этого, нужно учесть, что сосед слева и сосед справа неразличимы, т. е. перестановки $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $a_1, a_n, a_{n-1}, \dots, a_2$ дают одно и то же размещение за столом. Так как всего возможно $n!$ перестановок, из которых каждые $2n$ одинаковы, то искомое число равно

$$\frac{n!}{2n} = \frac{1}{2} (n-1)!.$$

Ответ. $\frac{1}{2} (n-1)!$.

21.2. Всего из пяти элементов можно составить P_5 перестановок. Среди них будет P_4 , у которых на первом месте a_1 , и P_4 , у которых на первом месте a_2 . Однако перестановки, у которых на первом месте a_1 , а на втором месте a_2 , попали и в первую, и во вторую группу. Таких перестановок P_3 .

Поэтому искомое число перестановок равно

$$P_5 - (2P_4 - P_3) = 78.$$

Ответ. 78.

21.3. Из семи разрядов три должны быть заняты двойками, что дает C_7^3 вариантов. На каждое из оставшихся мест можно поместить любую из восьми цифр, благодаря чему каждый из предыдущих вариантов даст еще 8^4 возможностей.

Ответ. $8^4 \cdot C_7^3 = 143\,360$.

21.4. Предположим, что в каждое число входят три различные единицы: $1_1, 1_2, 1_3$, а остальные цифры 0, 2, 3, 4 и 5 равноправны. Тогда можно получить P_8 различных чисел. Отсюда нужно исключить P_7 чисел, начинающихся с нуля.

На самом деле разные единицы неразличимы. Другими словами, вместо одного числа мы получим P_3 одинаковых чисел, отличающихся лишь взаимными перестановками единиц.

Ответ. $\frac{P_8 - P_7}{P_3} = 5880$.

21.5. Предположим, что каюты неравноценны. Это дает в $8!$ раз больше вариантов, чем в случае равноценных кают, что мы учтем позднее.

В первую каюту можно заселить любых четыре из 32 экскурсантов, что можно сделать C_{32}^4 способами, во вторую — любых четырех из 28 оставшихся и т. д. В итоге получим

$$C_{32}^4 C_{28}^4 \dots C_8^4 C_4^4$$

способов. Это число остается разделить на $8!$ и произвести упрощения.

Ответ. $\frac{32!}{(4!)^8 8!}$.

21.6. Рассмотрим k -й член суммы

$$kC_n^k = k \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n!}{(n-k)! (k-1)!} = n \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Данную сумму можно переписать в виде

$$n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Ответ. $n \cdot 2^{n-1}$.

21.7. Из разложения

$$\begin{aligned} (1+i)^n &= C_n^0 + C_n^1 i + C_n^2 i^2 + C_n^3 i^3 + C_n^4 i^4 + \dots + C_n^n i^n = \\ &= C_n^0 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + \dots + C_n^n i^n \end{aligned}$$

выделим действительную часть и приравняем действительной части комплексного числа $(1+i)^n$. В самом деле,

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right),$$

т. е.

$$C_n^0 - C_n^2 + \dots + (-1)^k C_n^{2k} = \sqrt{2}^n \cos \frac{n\pi}{4},$$

где $n-1 \leq 2k \leq n$.

Последнее ограничение означает, что через $2k$ обозначено то из чисел $n-1$ и n , которое является четным.

Ответ. $\sqrt{2}^n \cos \frac{n\pi}{4}$.

21.8. Условию задачи удовлетворяют такие n , для которых равенство

$$C_n^{k-1} + C_n^{k+1} = 2C_n^k \quad (1)$$

выполняется хотя бы для одного k . Заметим, что $1 \leq k \leq n-1$; $n \geq 2$. Равенство (1) перепишем в виде

$$\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k+1)!} = 2 \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

что после простых преобразований даст

$$4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0,$$

откуда

$$k = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}.$$

Чтобы выражение в правой части было целым, нужно сначала потребовать

$$n+2 = m^2, \text{ т. е. } n = m^2 - 2.$$

Поскольку $n \geq 2$, то $m^2 \geq 4$ и $m \geq 2$. Тогда

$$k = \frac{m^2 - 2 \pm m}{2}.$$

Если взять знак минус, получим

$$k_1 = \frac{m^2 - m - 2}{2} = \frac{(m+1)(m-2)}{2}. \quad (2)$$

Число стоящее в числителе, четное при всех m . Значение $m=2$ нужно исключить, так как тогда $k_1=0$, что невозможно. Если же $m \geq 3$, то $m+1 \geq 4$, а $m-2 \geq 1$. Следовательно, $k_1 \geq 2$. Потребуем теперь, чтобы выполнялось второе условие: $k_1 \leq n-1$, т. е. $\frac{m^2 - m - 2}{2} \leq m^2 - 3$, что равносильно неравенству $m^2 + m - 4 \geq 0$. Последнее неравенство справедливо при всех $m \geq 3$.

Остается исследовать

$$k_2 = \frac{m^2 - 2 + m}{2} = \frac{(m+2)(m-1)}{2}. \quad (3)$$

Так как условие $n \geq 2$, из которого следует, что $m \geq 2$, должно выполняться и для k_2 , то формула (3) по сравнению с (2) может дать лишь одно дополнительное значение: $m=2$. Однако при $m=2$ получим, что $k_2=2$ и $n=2$. Это противоречит требованию $k \leq n-1$. Таким образом, формула (3) не дает новых значений m , а следовательно, и n .

Ответ. $n = m^2 - 2$, где $m = 3, 4, 5, \dots$

21.9. Так как

$$(a+b+c+d)^n = [(a+b) + (c+d)]^n = \\ = (a+b)^n + C_n^1 (a+b)^{n-1} (c+d) + \dots + (c+d)^n,$$

то после раскрытия скобок получим все неподобные члены. Их число будет равно

$$(n+1) \cdot 1 + n \cdot 2 + (n-1) \cdot 3 + \dots + 2n + 1 \cdot (n+1),$$

где для симметрии к крайним членам приписаны множителями единицы. Чтобы вычислить эту сумму, запишем ее k -й член: $(n+2-k)k = (n+2)k - k^2$. Тогда наша сумма примет вид

$$(n+2)[1+2+\dots+(n+1)] - [1^2+2^2+\dots+(n+1)^2] = \\ = (n+2) \frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \\ = (n+1)(n+2) \left(\frac{n+2}{2} - \frac{2n+3}{6} \right).$$

Ответ. $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$.

21.10. Предположим, что $0 \leq k \leq n-1$. Запишем данное выражение в виде

$$(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}+x^k+x^{k+1}+\dots+x^{n-1})^2.$$

Члены, содержащие x^k , могут быть получены только в результате почленного перемножения членов суммы $1+x+\dots+x^{k-1}+x^k$ с членами той же суммы, записанной в обратном порядке, т. е.

$$1 \cdot x^k, x \cdot x^{k-1}, \dots, x^{k-1} \cdot x, x^k \cdot 1.$$

Так как слагаемых будет $k+1$, то и коэффициент при x^k будет равен $k+1$.

Предположим теперь, что $n-1 < k \leq 2(n-1)$. Тогда нужно почленно перемножить суммы

$$x^{k-n+1} + \dots + x^{n-1}, \quad x^{n-1} + \dots + x^{k-n+1},$$

в результате чего получим $2n-k-1$ членов, содержащих x^k .

Ответ. $k+1$, если $0 \leq k \leq n-1$;

$$2n-k-1, \text{ если } n-1 < k \leq 2n-2.$$

21.11. Сравним коэффициент члена разложения с номером $k+1$ с коэффициентом десятого члена разложения:

$$C_n^k \frac{2^k}{5^{n-k}5^k} < C_n^{10} \frac{2^{10}}{5^{n-10}5^{10}}.$$

Так как знаменатели одинаковы, то

$$C_n^* 2^k < C_n^* 2^9.$$

Поскольку десятый член разложения имеет наибольший коэффициент, то он больше девятого и больше одиннадцатого:

$$C_n^* 2^8 < C_n^* 2^9, \quad C_n^{10} 2^{10} < C_n^* 2^9.$$

Из первого неравенства следует, что $\frac{n!}{(n-8)! 8!} < \frac{2n!}{(n-9)! 9!}$, т. е. $n > 12,5$. Из второго $\frac{2n!}{(n-10)! 10!} < \frac{n!}{(n-9)! 9!}$, т. е. $n < 14$.

Ответ. $n = 13$.

21.12. Преобразуем выражение, стоящее в левой части, следующим образом:

$$\begin{aligned} (1 + x^2 + x^5)^{20} &= [x^5 + (1 + x^2)]^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{5(20-k)} (1 + x^2)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{100-5k} \sum_{m=0}^k C_k^m x^{2m} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \sum_{m=0}^k C_k^m x^{100-(5k-2m)}. \end{aligned}$$

Вопрос состоит в следующем: если $k, m = 1, 2, \dots, 20$, причем $m \leq k$, то какие значения от 0 до 100 принимает выражение $5k - 2m$.

Если $m = 0, 1, 2, 3, 4$, то получим соответственно $5k, 5k-2, 5k-4, 5k-6, 5k-8$. Если бы k не было связано ограничениями, то мы получили бы все числа, так как в эти пять выражений вошли числа, дающие при делении на 5 в остатке 0, 3, 1, 4 и 2 соответственно. Однако $k = 0, 1, \dots, 20$ и, кроме того, $k \geq m$. Так как $5k$ получено при $m = 0$, то k может принимать все свои 21 значение, в результате чего получим все числа, кратные 5 от 0 до 100. Рассмотрим теперь числа, которые при делении на 5 дают в остатке 1. У нас они записаны в виде $5k-4$ и получились при $m = 2$, в силу чего $k = 2, 3, \dots, 20$. В результате мы получим 19 чисел, дающих при делении на 5 в остатке 1. В эту группу не войдет лишь число 1. Числа, дающие в остатке 2, записаны в виде $5k-8$, где $k \geq 4$. Следовательно, $5k-8 = 12, 17, \dots, 92$, т. е. выпадают числа 2, 7 и 97. Для чисел вида $5k-2$ переменное $k = 1, 2, \dots, 20$ и

$5k-2=3, 8, \dots, 98$, куда вошли все числа, дающие в остатке 3. Среди чисел вида $5k-6$, где $k=3, \dots, 20$, мы не встретим 4 и 99.

Числа 1, 2, 4, 7, 97 и 99 не могут быть получены из выражения $5k-2m$ и при $m > 4$. В самом деле, с одной стороны, $5k-2m \geq 5m-2m=3m > 12$, а с другой стороны,

$$5k-2m < 5k-8 \leq 100-8=92,$$

т. е.

$$12 < 5k-2m < 92.$$

Итак, выпали 6 чисел 1, 2, 4, 7, 97 и 99, т. е. будут отсутствовать члены с показателями 99, 98, 96, 93, 3, 1.

Ответ. 95.

21.13. Пусть P_n — ответ на вопрос задачи для последовательности, состоящей из n элементов. В первой группе может оказаться либо один элемент (a_1), либо два элемента (a_1, a_2). Разбиений, содержащих в первой группе один элемент (a_1), будет столько, сколько разбиений можно образовать из $n-1$ оставшихся членов последовательности $a_2, a_3, \dots, a_n$, т. е. P_{n-1} . Разбиений же, содержащих в первой группе два элемента, будет P_{n-2} , так как после образования группы (a_1, a_2) останется $n-2$ элементов $a_3, \dots, a_n$.

Итак,

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2}.$$

Такая формула называется рекуррентной, потому что, зная P_1 и P_2 и применяя ее последовательно, мы получим P_3 , затем P_4 и т. д. Поскольку $P_1=1$, а $P_2=2$, то $P_3=3$, $P_4=5$, $P_5=8$, $P_6=13$, $P_7=21$, $P_8=34$, $P_9=55$, $P_{10}=89$.

Ответ. 89.

21.14. Пусть на плоскости проведены m параллельных прямых. Они разобьют ее на $m+1$ областей. Если провести еще одну непараллельную прямую, то областей станет $2(m+1)$. Предположим, что k непараллельных прямых образуют, пересекаясь с m параллельными прямыми, M_k областей. Если добавить еще одну прямую, пересекающую все имеющиеся, но не проходящую ни через одну из старых точек пересечения, то на этой прямой будет $m+k$ точек пересечения с остальными прямыми, в результате чего образуется $m+k+1$ новых областей.

Таким образом,

$$M_{k+1} = M_k + m + k + 1.$$

Так как $M_0 = m + 1$, то $M_1 = (m + 1) + (m + 1)$,

$$M_2 = (m + 1) + (m + 1) + (m + 2),$$

$$M_3 = (m + 1) + (m + 1) + (m + 2) + (m + 3), \dots,$$

$$\begin{aligned} M_n &= (m + 1) + (m + 1) + (m + 2) + \dots + (m + n) = \\ &= m + 1 + mn + \frac{(1+n)n}{2} = \frac{(n+1)(2m+n)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Остается доказать эту формулу методом математической индукции, что сводится к элементарным выкладкам, которые мы оставляем читателю.

Ответ. $\frac{(n+1)(2m+n)}{2} + 1.$

Г л а в а 22

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

22.1. Введем обозначения:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4};$$

$$0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arctg} \frac{7}{23} = \beta, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{7}{23}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4};$$

$$0 < \frac{\pi}{4} - \beta < \frac{\pi}{4}.$$

В этих обозначениях равенство примет вид

$$2\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta,$$

причем правая и левая части лежат в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$.

Возьмем тангенсы от обеих частей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{8}{15}, \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta} = \frac{8}{15}.$$

Так как тангенс является монотонной функцией в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, то равенство доказано.

22.2. Пусть

$$\operatorname{arctg} \frac{7}{9} = \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{9}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{arcctg} 8 = \beta, \quad \operatorname{ctg} \beta = 8, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4}.$$

Так как $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ и

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = 1, \quad \text{то } \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Наше выражение принимает теперь вид

$$\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Поскольку $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} < \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, то

$$0 < \frac{\pi}{4} + \gamma < \frac{\pi}{2},$$

где $\gamma = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$ и $\sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Найдем

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + \gamma \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \gamma + \sin \gamma) = \frac{\sqrt{7}+1}{4}.$$

Остается воспользоваться определением арксинуса.

Ответ. $\arcsin \frac{\sqrt{7}+1}{4}$.

22.3. Рассмотрим вначале первое и третье слагаемые:

$$\operatorname{arctg}(-2) = \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = -2, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0;$$

$$\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) = \beta, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{3}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < 0.$$

Таким образом, $-\pi < \alpha + \beta < 0$, что не является областью главных значений какой-нибудь обратной тригонометрической функции. Поэтому прибавим ко всем частям неравенства π : $0 < \pi + \alpha + \beta < \pi$. Теперь $\pi + \alpha + \beta$ попадает в область значений арккотангенса, что обеспечивает взаимно

однозначный переход к обратным функциям. Найдем

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha + \beta) = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{-2 - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{7}.$$

Следовательно,

$$\pi + \alpha + \beta = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{7}\right), \text{ т. е. } \alpha + \beta = -\operatorname{arccctg}\frac{1}{7}.$$

Наше выражение равно

$$\arcsin \frac{1}{3} - \operatorname{arccctg} \frac{1}{7}.$$

Пусть

$$\arcsin \frac{1}{3} = \gamma, \quad \sin \gamma = \frac{1}{3}, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arccctg} \frac{1}{7} = \delta, \quad \operatorname{ctg} \delta = \frac{1}{7}, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < \gamma - \delta < \frac{\pi}{2}$, что является интервалом значений арксинуса, то вычислим синус от $\gamma - \delta$:

$$\sin(\gamma - \delta) = \sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \sin \delta.$$

Так как

$$\cos \gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos \delta = \frac{1}{5\sqrt{2}}, \quad \sin \delta = \frac{7}{5\sqrt{2}},$$

то

$$\sin(\gamma - \delta) = \frac{1 - 14\sqrt{2}}{15\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 28}{30}.$$

Ответ. $\arcsin \frac{\sqrt{2} - 28}{30}.$

22.4: Сумма существует при $0 \leq x \leq 1$. Введем обозначения и используем определение арксинуса:

$$\arcsin \sqrt{1-x} = \alpha, \quad \sin \alpha = \sqrt{1-x}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin \sqrt{x} = \beta, \quad \sin \beta = \sqrt{x}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Так как сумма $\alpha + \beta$ лежит в интервале $[0, \pi]$, который является интервалом монотонности косинуса, то имеется взаимно однозначное соответствие между $\alpha + \beta$ и $\cos(\alpha + \beta)$ при условии, что $0 \leq x \leq 1$. Так как

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \sqrt{x} \sqrt{1-x} - \sqrt{1-x} \sqrt{x} = 0,\end{aligned}$$

то $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2}$ при $0 \leq x \leq 1$.

22.5. Оценим $\varphi = \pi(x^2 + x - 3)$, если $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Имеем

$$\begin{aligned}0 \leq x^2 \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \quad 0 \leq x^2 + x \leq \frac{1}{2}, \\ -3\pi \leq \varphi \leq -\frac{5\pi}{2}\end{aligned}$$

или

$$\pi \leq 4\pi + \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\arccos \sin \varphi &= \arccos \sin(4\pi + \varphi) = \\ &= \arccos \sin \left[\frac{3\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{2} - 4\pi - \varphi \right) \right] = \\ &= \arccos \left[-\cos \left(\frac{3\pi}{2} - 4\pi - \varphi \right) \right] = \pi - \arccos \cos \left(\frac{3\pi}{2} - 4\pi - \varphi \right),\end{aligned}$$

где

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} - 4\pi - \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\arccos \sin \varphi = \pi - \frac{3\pi}{2} + 4\pi + \varphi = \frac{7\pi}{2} + \varphi.$$

Ответ. $\frac{7\pi}{2} + \pi(x^2 + x - 3)$.

22.6. При $0 \leq x \leq 1$ оба арксинуса существуют. Для первого это очевидно, а для второго имеем

$$0 \leq x^2 \leq 1, \quad -1 \leq -x^2 \leq 0, \quad 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Следовательно,

$$-1 \leq x - \sqrt{1-x^2} \leq 1$$

и, тем более,

$$-1 \leq \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \leq 1.$$

Введем обозначение

$$\arcsin x = \alpha, \quad \sin \alpha = x, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \beta, \quad \sin \beta = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Нужно доказать, что $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$, или $\alpha - \frac{\pi}{4} = \beta$. Так как $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$, то $\alpha - \frac{\pi}{4}$ и β лежат в интервале монотонности синуса. Поэтому, если мы докажем, что синусы этих аргументов равны, то тем самым будет доказано и равенство самих аргументов. Поскольку

$$\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - \sqrt{1-x^2})$$

(перед корнем взят знак плюс, так как $\cos \alpha \geq 0$ при $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$).

Итак, доказано, что $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \beta$, откуда следует справедливость нашего равенства.

22.7. Так как $x < -1$, то $-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 0$. Введем обозначения

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{2x}{1+x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0;$$

$$\operatorname{arctg} x = \beta, \quad \operatorname{tg} \beta = x, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < -\frac{\pi}{4},$$

$$\text{т. е. } -\pi < 2\beta < -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$-\frac{3\pi}{2} < \alpha + 2\beta < -\frac{\pi}{2},$$

т. е. данное выражение лежит в интервале монотонности синуса. Найдем

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\beta) &= \sin \alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos \alpha; \\ \cos 2\beta &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad \sin 2\beta = \frac{2x}{1 + x^2}, \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}} = \frac{|1 - x^2|}{1 + x^2} = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2}, \text{ так как } x < -1. \end{aligned}$$

После подстановки получим

$$\sin(\alpha + 2\beta) = \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{1 + x^2} = 0,$$

т. е. $\alpha + 2\beta = -\pi$.

Ответ. $-\pi$.

22.8. Из уравнения следует, что

$$\arcsin x = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}.$$

Поскольку

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$$

то возможны лишь три значения $n = 0, -1, 1$.

Если $n = 0$, то $\arcsin x = \frac{\pi}{12}$,

$$x_1 = \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Если $n = -1$, то $\arcsin x = -\frac{\pi}{4}$,

$$x_2 = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если $\pi = 1$, то $\arcsin x = \frac{5\pi}{12}$,

$$x_3 = \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Ответ. $\frac{1}{2} \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

22.9. Если x — корень данного уравнения, то $\pi - x$ будет его корнем. Поэтому достаточно найти лишь неотрицательные корни. Если $x \geq 0$, то

$$\arcsin \frac{3x}{5} = \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{3x}{5}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin \frac{4x}{5} = \beta, \quad \sin \beta = \frac{4x}{5}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin x = \gamma, \quad \sin \gamma = x, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}.$$

Если перенести α в правую часть уравнения, то получим, что $\beta = \gamma - \alpha$, причем $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma - \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Поскольку обе части уравнения находятся в интервале монотонности синуса, то данное уравнение равносильно такому:

$$\sin \beta = \sin (\gamma - \alpha).$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{4x}{5} = x \sqrt{1 - \frac{9x^2}{25}} - \frac{3x}{5} \sqrt{1 - x^2},$$

добавив к нему условие $\left| \frac{4x}{5} \right| \leq 1$, являющееся в данном случае следствием уравнения. Получаем $x_1 = 0$.

Остается $4 + 3\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{25 - 9x^2}$, а после возведения в квадрат $\sqrt{1 - x^2} = 0$, $x = 1$.

Делаем проверку иррационального уравнения.

Ответ. $\pm 1, 0$.

22.10. Из условия следует, что $x > 0$. В таком случае

$$\arcsin 2x = \alpha, \quad \sin \alpha = 2x, \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin x = \beta, \quad \sin \beta = x, \quad 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Уравнение примет вид $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$, и обе его части окажутся в интервале $(0, \pi]$, который является интервалом монотонности косинуса. Следовательно, уравнение

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \frac{\pi}{3}.$$

равносильно данному. Раскрывая скобки и заменяя тригонометрические функции α и β их выражениями через x , придем к уравнению

$$\sqrt{1-4x^2} - \sqrt{1-x^2} = 2x^2 + \frac{1}{2}.$$

После возведения в квадрат получим

$$4(1-4x^2)(1-x^2) = (4x^2 + 1)^2.$$

При переходе к последнему уравнению могут появиться посторонние корни из-за того, что обе левые скобки могут стать отрицательными. Чтобы избежать этого, добавим условие $|2x| \leq 1$.

Уравнение $28x^2 - 3 = 0$, к которому сводится последнее, имеет корни $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$. Из них следует выбрать первый, так как он положителен и так как $2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} < 1$.

Ответ. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$.

22.11. Обозначим

$$\operatorname{arctg}(2 + \cos x) = \alpha, \quad \operatorname{arctg}\left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right) = \beta.$$

Так как

$$2 + \cos x > 0 \quad \text{и} \quad 2 \cos^2 \frac{x}{2} \geq 0,$$

то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.

Уравнение принимает вид $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$, причем

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Так как $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — интервал монотонности тангенса, то уравнение $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ равносильно уравнению $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

Переходя к уравнению

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = 1,$$

мы можем потерять те корни, для которых $\operatorname{tg} \alpha$ или $\operatorname{tg} \beta$ не существует. В нашем случае этого не произойдет, поскольку

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 + \cos x, \quad \operatorname{tg} \beta = 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

а правые части существуют всегда. Получаем уравнение

$$\frac{2 + \cos x - 2 \cos^2 \frac{x}{2}}{1 + (2 + \cos x) 2 \cos^2 \frac{x}{2}} = 1,$$

которое после преобразований принимает вид

$$2 \cos^4 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Так как уравнение $2 \cos^2 \frac{x}{2} + 1 = 0$ не имеет решений, то остается $\cos \frac{x}{2} = 0$.

Ответ. $\pi(2n + 1)$.

22.12. Пусть

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} &= \alpha, & \sin \alpha &= \frac{2}{3\sqrt{x}}, & 0 < \alpha &\leq \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin \sqrt{1-x} &= \beta, & \sin \beta &= \sqrt{1-x}, & 0 &\leq \beta \leq \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin \frac{1}{3} &= \gamma, & \sin \gamma &= \frac{1}{3}, & 0 < \gamma &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta \leq \frac{\pi}{2}$, то обе части уравнения лежат в интервале монотонности синуса. Поэтому уравнение равносильно такому:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \gamma.$$

или

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \sqrt{1 - (1 - \sqrt{1-x})^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2} \sqrt{1-x} = \frac{1}{3}.$$

После упрощений получим уравнение

$$\sqrt{x} = \sqrt{13x - 4 - 9x^2},$$

имеющее единственный корень $x = \frac{2}{3}$. Делаем проверку и убеждаемся, что $x = \frac{2}{3}$ является корнем предыдущего уравнения и, следовательно, корнем исходного уравнения.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

22.13. Введем обозначения

$$\operatorname{arctg}(x-1) = \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = x-1, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} x = \beta, \quad \operatorname{tg} \beta = x, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg}(x+1) = \gamma, \quad \operatorname{tg} \gamma = x+1, \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} 3x = \delta, \quad \operatorname{tg} \delta = 3x, \quad -\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Наше уравнение принимает вид $\alpha + \beta + \gamma = \delta$ или $\alpha + \beta = \delta - \gamma$. Обе части уравнения лежат в интервале $(-\pi, \pi)$. Если мы возьмем котангенсы от обеих частей уравнения, то можем потерять лишь корень, которому соответствует значение углов, равное 0, так как это — единственное значение из интервала $(-\pi, \pi)$, в котором котангенс не существует. Проверим, будет ли выполняться равенство $\alpha + \beta = \delta - \gamma = 0$. Если $\alpha + \beta = 0$, то $\operatorname{arctg}(1-x) = \operatorname{arctg} x$, откуда $1-x = x$ и $x = \frac{1}{2}$. При $x = \frac{1}{2}$ получим, что $\delta - \gamma = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} \frac{3}{2} = 0$. Таким образом, $x_1 = \frac{1}{2}$ — корень уравнения.

Если $\alpha + \beta \neq 0$, то от обеих частей уравнения можно взять котангенсы:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \operatorname{ctg}(\delta - \gamma),$$

что приведет к следствию исходного уравнения. Раскрыв скобки и подставив выражения тригонометрических функций α , β , γ и δ через x , получим уравнение

$$\frac{1 - (x-1)x}{x-1+x} = \frac{1 + (x+1)3x}{3x - x - 1},$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - x^2 + x = 1 + 3x^2 + 3x, \\ x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Получаем два значения неизвестного: $x_2 = 0$, $x_3 = -\frac{1}{2}$. Проверкой убеждаемся, что оба значения удовлетворяют данному уравнению.

Ответ. $0, \pm \frac{1}{2}$.

Г л а в а 23

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПЕРИОДИЧНОСТЬ

23.1. С одной стороны, $\log_3 \sin x \leq 0$, так как $\sin x \leq 1$, а с другой стороны, $\log_3 \sin x \geq 0$, так как стоит под знаком квадратного корня. Остается одна возможность:

$$\log_3 \sin x = 0, \quad \sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} (4n + 1).$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} (4n + 1)$.

23.2. Чтобы найти область определения данной функции, нужно решить систему

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 > 0, \\ \log_{1/2}(x^2 - x - 1) > 0, \end{cases}$$

которая эквивалентна неравенству

$$0 < x^2 - x - 1 < 1,$$

или

$$(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 2) < 0,$$

т. е.

$$\left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) (x + 1)(x - 2) < 0.$$

$$\text{Ответ. } -1 < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < 2.$$

23.3. Данное выражение принимает действительные значения, если x удовлетворяет неравенству

$$\log_{1/3} \frac{2x-3}{x+1} \geq 0,$$

которое равносильно неравенству

$$0 < \frac{2x-3}{x+1} \leq 1.$$

Его можно заменить системой

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-3}{x+1} \left(\frac{2x-3}{x+1} - 1 \right) \leq 0, \\ 2x-3 \neq 0, \end{array} \right. \quad \text{т. е.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-4)}{(x+1)^2} \leq 0, \\ x \neq \frac{3}{2}. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ. } \frac{3}{2} < x \leq 4.$$

23.4. Чтобы существовал арккосинус, необходимо и достаточно

$$-1 \leq x^2 - 3x + 1 \leq 1,$$

т. е.

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x) \leq 0,$$

или

$$x(x-1)(x-2)(x-3) \leq 0,$$

откуда

$$0 \leq x \leq 1, \quad 2 \leq x \leq 3.$$

Из найденных интервалов нужно исключить точки, в которых $\operatorname{tg} 2x$ не существует, т. е. числа вида $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$.

Два из этих чисел: $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{3\pi}{4}$ — лежат в найденных интервалах.

Ответ. $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < x \leq 1$, $2 \leq x < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < x \leq 3$.

23.5. Данное выражение принимает действительные значения, если удовлетворяется система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ 2 - y > 0, \\ y > x^2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ y < 2, \\ y > x^2. \end{cases}$$

Решением этой системы будет часть плоскости, лежащая внутри параболы $y = x^2$, вне круга $x^2 + y^2 = 1$ и ниже прямой $y = 2$, причем точки, лежащие на границе и принадлежащие или прямой, или параболе, не входят в область, а точки, лежащие на окружности (кроме точек A и C — рис. Р.23.5), входят в область определения.

23.6. Предположим, что

$$\cos \sqrt{x+a} = \cos \sqrt{x}$$

для всех $x \geq 0$, где $a > 0$.

Тогда при $x = 0$ получим, что

$$\cos \sqrt{a} = 1, \quad \sqrt{a} = 2n\pi,$$

а при $x = a$ получим

$$\cos \sqrt{2a} = \cos \sqrt{a} = \cos 2n\pi = 1,$$

$$\text{т. е. } \sqrt{2a} = 2k\pi.$$

Так как $\sqrt{a} = 2n\pi$, а $\sqrt{2a} = 2k\pi$, то, разделив второе равенство на первое, получим

$$\sqrt{2} = \frac{k}{n},$$

где k и n — целые, что невозможно. Следовательно, функция $y = \cos \sqrt{x}$ не является периодической.

23.7. Первый способ. Пусть T — период функции. Тогда

$$\cos(x+T)^2 = \cos x^2$$

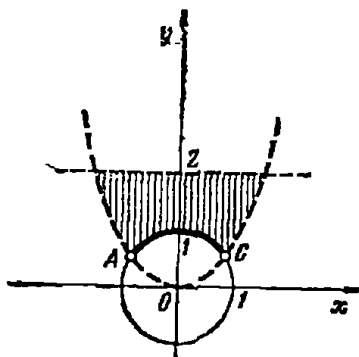


Рис. Р.23.5.

при всех x . Если $x=0$, то получим, что $\cos T^2=1$, откуда $T^2=2\pi$. Если $x=T\sqrt{2}$, то $\cos(\sqrt{2}+1)^2 T^2=\cos 2T^2$, откуда или $(\sqrt{2}+1)^2 T^2+2T^2=2k\pi$, или $(\sqrt{2}+1)^2 T^2-2T^2=2m\pi$, т. е. либо $(5+2\sqrt{2})T^2=2k\pi$, либо $(1+2\sqrt{2})T^2=2m\pi$. Подставляя в оба выражения $T^2=2\pi$, получим соответственно

$$5+2\sqrt{2}=\frac{k}{n} \quad \text{или} \quad 1+2\sqrt{2}=\frac{m}{n},$$

что невозможно, так как слева стоят иррациональные числа, а справа — рациональные.

Второй способ. Найдём корни функции $\cos x^2$:

$$x^2 = \frac{\pi}{2} (2n+1), \quad x = \pm \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим положительные корни

$$x_n = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}.$$

Предположим, что $T > 0$ — период функции. Тогда, если при $x=x_1$ функция равна нулю, то и при $x=x_1+T$ она тоже равна нулю. Другими словами, $x_1+T=x_m$. Аналогично $x_2+T=x_k$. Вычитая одно равенство из другого, получим

$$\sqrt{\pi} \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = \sqrt{\pi} \left(\sqrt{\frac{2k+1}{2}} - \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \right),$$

т. е.

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{2k+1} - \sqrt{2m+1}.$$

Возведём в квадрат:

$$\sqrt{15} + k + m - 3 = \sqrt{(2k+1)(2m+1)}.$$

После вторичного возведения в квадрат получим

$$(k+m-3)^2 + 15 + 2(k+m-3)\sqrt{15} = (2k+1)(2m+1).$$

Это равенство возможно лишь при $\sqrt{15}(k+m-3)=0$, так как все остальные его элементы — целые. Однако числа k и m выбраны так, что $k \geq 3$ и $m \geq 2$, т. е. $k+m > 3$.

23.8. Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом T , то при всех x должно выполняться тождество

$$\sin(x+T) + \cos[a(x+T)] = \sin x + \cos ax.$$

Положив в этом тождестве $x=0$, $x=-T$ и $x=T$, получим

$$\begin{cases} \sin T + \cos aT = 1, \\ -\sin T + \cos aT = 1, \\ \sin 2T + \cos 2aT = \sin T + \cos aT. \end{cases}$$

Из первого и второго равенств найдем, что $\cos aT = 1$ и $T = \frac{2n\pi}{a}$. Подставим найденное значение T в последнее уравнение:

$$\sin \frac{4n\pi}{a} + \cos 4n\pi = \sin \frac{2n\pi}{a} + \cos 2n\pi,$$

т. е.

$$\sin \frac{4n\pi}{a} = \sin \frac{2n\pi}{a},$$

откуда или $\frac{4n\pi}{a} - \frac{2n\pi}{a} = 2k\pi$, или $\frac{4n\pi}{a} + \frac{2n\pi}{a} = (2k+1)\pi$, т. е.

или $a = \frac{n}{k}$, или $a = \frac{6n}{2k+1}$. И в том и в другом случае a — рациональное число.

23.9. Период функции $\cos \frac{3x}{2}$ равен $T_1 = 2\pi: \frac{3}{2} = \frac{4\pi}{3}$, а период функции $\sin \frac{x}{3}$ равен 6π .

Наименьшее общее кратное этих периодов будет 12π . Очевидно, что 12π — период данной функции. Докажем, что это — основной период.

Пусть существует период τ такой, что $0 < \tau < 12\pi$. Тогда имеем тождество

$$\cos \frac{3}{2}(x+\tau) = \sin \frac{x+\tau}{3} = \cos \frac{3}{2}x + \sin \frac{x}{3} = 0,$$

или

$$\sin \frac{3}{4}\tau \sin \frac{3}{4}(2x+\tau) + \sin \frac{\tau}{6} \cos \frac{1}{6}(2x+\tau) = 0.$$

Так как $\tau < 12\pi$, $a \frac{3}{4}\tau = \frac{3\tau}{4\pi}\pi$ и $\frac{\tau}{6} = \frac{\tau}{6\pi}\pi$, то одно из чисел $\frac{3\tau}{4\pi}$ или $\frac{\tau}{6\pi}$ не является целым, т. е. по крайней мере

одно из чисел $\sin \frac{3}{4}\tau$ и $\sin \frac{\tau}{6}$ не равно нулю. Пусть, например, $\sin \frac{3}{4}\tau \neq 0$.

Тогда имеем тождество

$$\frac{\sin \frac{3}{4}(2x+\tau)}{\cos \frac{1}{6}(2x+\tau)} = \frac{\sin \frac{\tau}{6}}{\sin \frac{3}{4}\tau},$$

что невозможно, так как в правой части стоит постоянная величина. Легко убедиться, что это тождество ложно, выбрав, например, $x=0$ и $x=6\pi$ и сравнив для этих x левые части. Получим $\sin \frac{3\tau}{4} = 0$, что противоречит предположению.

Ответ. 12π .

Глава 24

НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

24.1. Так как

$$\sin x - \cos^2 x - 1 = \sin^2 x + \sin x - 2 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4},$$

то функция достигает своего минимума при $\sin x + \frac{1}{2} = 0$.

Ответ. $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$.

24.2. Воспользуемся формулой преобразования произведения синусов в разность косинусов

$$y = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{6} - \cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right).$$

Чтобы функция y достигла своего наибольшего значения, нужно положить

$$\cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) = -1,$$

откуда $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}(2n+1) = \frac{\pi n}{2} + \frac{7\pi}{24}$. Наибольшее значение

функции равно

$$y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}.$$

Ответ. При $x = \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{24}$ $y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}.$

24.3. Данную функцию можно записать в виде

$$y = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x),$$

после чего она легко преобразуется дальше:

$$y = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

Ответ. $\frac{1}{4}.$

24.4. Запишем данное выражение в виде

$$(x + y + 1)^2 + (x - 2)^2 - 3.$$

Оно будет иметь наименьшее значение, если

$$\begin{cases} x - 2 = 0, \\ x + y + 1 = 0, \end{cases}$$

т. е. $x = 2, y = -3.$

Ответ. -3 при $x = 2, y = -3.$

24.5. Точки ± 1 и ± 2 разбивают числовую ось на пять интервалов, в каждом из которых нетрудно найти наименьшее значение y .

а) Если $x \leq -2$, то

$$y = x^2 - 1 + x^2 - 4 - x - 2 - x - 1 = 2x^2 - 2x - 8.$$

Абсцисса вершины параболы $y = 2x^2 - 2x - 8$ равна $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$, т. е. при $x \leq -2$ мы находимся левее вершины, функция y на этом участке убывает, а потому наименьшее значение она принимает в самой правой точке интервала: $x = -2, y = 4.$

б) Если $1) -2 \leq x \leq -1$, то легко проверить, что

$$y = 4.$$

¹⁾ Во всех случаях удобно граничную точку относить к обоим интервалам, чтобы не столкнуться с ситуацией, когда наименьшее значение не достигается.

в) Если $-1 \leq x \leq 1$, то

$$y = -2x^2 + 2x + 8.$$

Так как ветви параболы направлены вниз, то наименьшее значение нужно искать на концах интервала: при $x = -1$ мы уже видели, что $y = 4$; при $x = 1$, $y = 8$.

г) Если $1 \leq x \leq 2$, то $y = 2x + 6$. Наименьшим будет значение в точке $x = 1$.

д) Если $x \geq 2$, то

$$y = 2x^2 + 2x - 2.$$

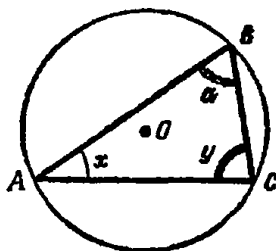
Абсцисса вершины этой параболы $x = -\frac{1}{2}$; она лежит левее точки $x = 2$. Следовательно, наименьшее значение достигается при $x = 2$, т. е. $y = 10$.

Ответ. $y_{\min} = 4$ при $-2 \leq x \leq -1$.

24.6. Заменим $\frac{a}{x}$ на сумму из семи одинаковых слагаемых, каждое из которых равно $\frac{a}{7x}$. К функции

$$x^7 + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x}$$

применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Получим



$$x^7 + \frac{a}{x} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{a^7}{7^7}}.$$

Равенство достигается, когда

$$x^7 = \frac{a}{7x} = \sqrt[8]{\frac{a^7}{7^7}}, \text{ т. е. } x = \sqrt[8]{\frac{a}{7}}.$$

Ответ.

Рис. Р.24.7.

$$y_{\min} = 8 \sqrt[8]{\frac{a^7}{7^7}} \text{ при } x = \sqrt[8]{\frac{a}{7}}.$$

24.7. Если ввести углы x и y (рис. Р. 24.7), то по теореме синусов

$$AB + BC = 2R (\sin x + \sin y) = 4R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{x-y}{2}.$$

Максимум этого выражения достигается при $\cos \frac{x-y}{2} = 1$, т. е. при $x - y = 0$. Так как $x + y = \pi - \alpha$, то $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Следовательно,

$$AB = BC = 2R \sin x = 2R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Ответ. $2R \cos \frac{\alpha}{2}$.

24.8. Если катеты основания обозначить через a и b , то боковая поверхность призмы равна

$$(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \sqrt{a^2 + b^2} = (a + b) \sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2.$$

Нам известна площадь основания. Поэтому $ab = 4$.

Преобразуем выражение для боковой поверхности так, чтобы участвовали только ab и $a + b$:

$$\begin{aligned} (a + b) \sqrt{(a + b)^2 - 2ab} + (a + b)^2 - 2ab = \\ = (a + b) \sqrt{(a + b)^2 - 8} + (a + b)^2 - 8. \end{aligned}$$

Мы получили монотонную функцию от $a + b$. Минимум ее достигается одновременно с минимумом $a + b$. Поскольку $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 4$, то равенство достигается, если $a = b = 2$.

Ответ. 2.

24.9. Так как правильный шестиугольник и квадрат — фигуры центрально-симметричные, то центр вписанного в шестиугольник квадрата должен совпадать с центром шестиугольника. Пусть K (рис. Р.24.9) — одна из вершин квадрата, а M — центрально-симметричная ей точка многоугольника. Обозначим через α

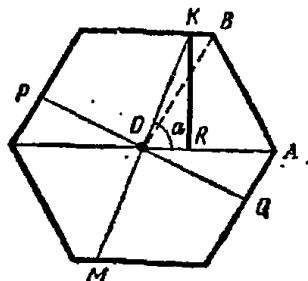


Рис. Р.24.9.

углом AOK (рис. Р.24.9). Тогда $KO = \frac{KR}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}a}{2 \sin \alpha}$. По теореме синусов

$$\frac{OQ}{\sin 60^\circ} = \frac{AO}{\sin [180^\circ - (150^\circ - \alpha)]},$$

откуда

$$OQ = \frac{a \sqrt{3}}{2 \sin (30^\circ + \alpha)}.$$

Чтобы задача имела решение, должно быть $OQ \geq OK$, т. е. $\sin(30^\circ + \alpha) \leq \sin \alpha$. Так как угол α больше угла BOA , то $\alpha \geq 60^\circ$. Кроме того, можно считать, что $\alpha \leq 90^\circ$, т. е. $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Чтобы для этих углов выполнялось условие

$$\sin(30^\circ + \alpha) \leq \sin \alpha,$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$75^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ.$$

Из формул для KO и OQ видно, что с увеличением α диагональ квадрата уменьшается. Следовательно, α нужно выбрать минимальным из возможных, т. е. $\alpha = 75^\circ$. Тогда

$$KO = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos 15^\circ},$$

а сторона квадрата равна $KO\sqrt{2}$.

$$\text{Ответ. } \frac{a\sqrt{6}}{2\cos 15^\circ} = a(3 + \sqrt{3}).$$

*Евгений Борисович Ваховский,
Альберт Анатольевич Рыкин*
**Задачи по элементарной математике
повышенной трудности**

М., 1968 г., 496 стр с илл.

Редактор *А. Д. Бершапский*
Техн. редактор *К. Ф. Брудно*
Корректоры *Т. С. Вайсберг,
С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 7/VIII 1968 г.
Подписано к печати 12/XII 1968 г.
Бумага 84×108/32.
Физ. печ. л. 15,5.
Условн. печ. л. 26,04.
Уч.-изд. л. 24,58.
Тираж 250 000 экз.
Т-16178. Цена книги 79 коп. Заказ 3018.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект. 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Воровская 28

